GDO 08 5.11.19

Lenstras Algorithmus

Eingabe: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$

Ausgabe: $\bar{x} \in \mathbb{Z}^n$ mit $A\bar{x} \le b$ oder Feststellung, dass $Ax \le b$ keine ganzzahlige Lösung hat.

(1) Transformiere die Eingabe gemäß Satz 1.7 so, dass $P^{\le}(A,b)$ ein volldimensionales Polytop ist.

(2) Falls $n=1$: Lies die Lösung ab und transformiere sie gemäß (1) zurück.

(3) Sonst: Wende den Algorithmus aus Kor. 1.6 an; falls es ein $\bar{x}$ liefert, transformiere dieses gemäß (1) zurück (stop), andernfalls löse mit dem ermittelten $d \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ die LP's

$$\delta_{max} := \max\{\langle d,x\rangle : Ax \le b\} \text{ und } \delta_{min} := \min\{\langle d,x\rangle : Ax \le b\}$$

und rufe Lenstras Algorithmus rekursiv auf für

$$Ax \le b \;,\; \langle d, x\rangle = \delta \qquad \left(\delta = \lfloor \delta_{min} \rfloor, \dots, \lceil \delta_{max} \rceil\right).$$

Falls einer der rekursiven Aufrufe eine ganzzahlige Lösung liefert, so transformiere diese gemäß (i) zurück und stop, andernfalls stelle fest, dass $Ax \le b$, $x \in \mathbb{Z}^n$ unlösbar ist.

Satz 1.8: Lenstras Algorithmus kann so implementiert werden, dass seine Laufzeit durch

$$2^{O(n^3)} \cdot p(\langle A, b\rangle)$$

nicht von n abhängendes

beschränkt ist (wobei p ein Polynom ist); insbesondere ist die Laufzeit für jedes konstante n polynomiell in $\langle A, b\rangle$.

Beweis: Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist beschränkt durch

$$\left(n(n+1)\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{4}}\right)^n \le 2^{O(n^3)}$$

∎

Bem.: Man kann Lenstras Algorithmus so modifizieren, dass er sogar alle gemischt-ganzzahligen linearen Probleme mit konstant vielen ganzzahligen Variablen in Polynomialzeit löst.

Kapitel 2: Polytope und der Simplex-Algorithmus

Simplex-Algorithmus für $\min \{\langle c,x\rangle : Ax \leq b\}$

- können annehmen: $P = P^{\leq}(A,b)$ Polytop, v Ecke von P
- Solange es eine Nachbarecke w von v gibt mit $\langle c,w\rangle < \langle c,v\rangle$:
  - Wähle ein solches w (PIVOTREGEL)
  - Ersetze v durch w

Fragen: ($d := \dim(P)$, $f_k(P) :=$ # k-dim. Seiten von P)

? (1) Gibt es eine Pivot-Regel, so dass die Länge des vom Simplex-Algorithmus genommenen Wegs polynomial in $f_{d-1}(P)$ beschränkt werden kann?

✓ (2) Wie groß kann $f_0(P)$ gemessen an $f_{d-1}(P)$ sein?

? (3) Hat der Graph von P polynomial in $f_{d-1}(P)$ beschränkten Durchmesser?

2.1 Ecken von Polytopen

Bemerkungen 2.1

Jedes d-Polytop P (d.h. $\dim(P)=d$) mit $n=f_{d-1}(P)$ Facetten erfüllt
$$f_k(P) \leq \binom{n}{d-k} \quad \text{für alle } k=0,1,\dots,d \,.$$

Beweis: Für jede k-Seite F von P gibt es $d-k$ Facetten $F_1,\dots,F_{d-k}$ von P, so dass
$$F = F_1 \cap \dots \cap F_{d-k}$$
ist. $\blacksquare$

Definition: Für ein Polytop P ist $\mathcal{L}(P)$ die durch "$\leq$" partiell geordnete Menge aller Seiten von P (einschließlich $\emptyset$, P).

Definition: Ein Simplex ist die konvexe Hülle affin unabhängiger Punkte.

Bemerkung 2.2: Für einen d-dimensionalen Simplex Δ_d ist $\mathcal{L}(\Delta_d)$ isomorph (d.h. es gibt eine in beide Richtungen inklusionserhaltende Bijektion) zu $2^{[d]}$ (Boole'scher Verband).