GDO 09 11.11.19

Bemerkung 1.3: Sei P ein d-Polytop.

(i) $\mathcal{L}(P)$ ist ein Verband (Seitenverband = face lattice)
(d.h. je zwei Elemente F, G haben eine eindeutige kleinste / größte obere / untere Schranke, ihren join $F \vee G$ / meet $F \wedge G$)

(ii) $\mathcal{L}(P)$ ist atomar und coatomar wobei die Atome die Ecken und die Coatome die Facetten von P sind.
D.h. jede echte Seite ist der join (die konvexe Hülle) ihrer Ecken und der meet (der Schnitt) der sie enthaltenden Facetten.
Insbesondere ist $\mathcal{L}(P)$ (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt durch die Ecken-Facetten Inzidenzen von P.

(iii) Es gibt ein (nicht eindeutig bestimmtes) d-Polytop P^Δ und eine Bijektion $\mathcal{L}(P) \to \mathcal{L}(P^\Delta)$, $F \mapsto F^\Delta$ mit:

a) $F \subseteq G \iff F^\Delta \supseteq G^\Delta$ b) $\dim(F^\Delta) = d-1-\dim(F)$

(insbesondere: F Ecke/Facette von P $\Leftrightarrow$ F^Δ Facette/Ecke von P^Δ)

P und P^Δ heißen dual zueinander.

Definition: Zwei Polytope sind kombinatorisch isomorph, wenn ihre Seitenverbände isomorph sind.

Definition: Ein d-Polytop heißt simplizial/einfach wenn jede Facette genau d Ecken hat / jede Ecke in genau d Facetten liegt.

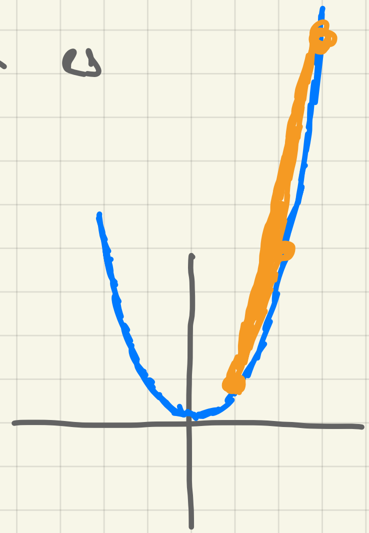
Bem. 1.4:

(i) Simplizialität und Einfachheit sind kombinatorische Eigenschaften (d.h. invariant unter kombinatorischer Isomorphie).

(ii) Ein Polytop ist genau dann simplizial/einfach, wenn es ein ein einfaches/simpliziales duales Polytop hat.

(iii) Ein d-Polytop ist einfach genau dann, wenn jede Ecke in genau d Kanten liegt.

(iv) Ein Polytop ist genau dann einfach und simplizial, wenn es ein Simplex ist.



$C_2(3)$

Definition: $\mu_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $\mu_d(t) := (t, t^2, t^3, \dots, t^d)$

("Momentenkurve")

$$C_d(n) := \operatorname{conv}\{\mu_d(1), \mu_d(2), \dots, \mu_d(n)\}$$

("zyklisches Polytop")

Lemma 2.5: [Vandermonde-Identität]

Für alle $t_0, t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_d(t_0) & \mu_d(t_1) & \cdots & \mu_d(t_d) \end{bmatrix}}_{p(t_0, \dots, t_d)} = \underbrace{\prod_{0 \le i < j \le d} (t_j - t_i)}_{q(t_0, \dots, t_d)}$$

$(d+1) \times (d+1)$

<u>Beweis:</u> • Induktion nach d, wobei $d=0$ klar.

- Können (aus Stetigkeitsgründen) annehmen, dass $t_0, .., t_{d-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ paarweise verschieden sind und müssen nur zeigen:

$$p(t_0, .., t_{d-1}, t) = q(t_0, .., t_{d-1}, t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (*)$$

- Beide Seiten von $(*)$ sind Polynome in t vom Grad d mit d paarweise verschiedenen Nullstellen $t_0, .., t_{d-1}$

- $p(t_0, .., t_{d-1}, 0) = (-1)^d \prod_{i<d} t_i \cdot p(t_0, .., t_{d-1})$
- $q(t_0, .., t_{d-1}, 0) = (-1)^d \prod_{i<d} t_i \cdot q(t_0, .., t_{d-1})$

- Nach Induktionsvoraussetzung stimmen die beiden Polynome also auch an der Stelle $0 \neq t_0, .., t_{d-1}$, also an wenigstens $d+1$ Stellen, überein; da sie Grad d haben, sind sie also identisch.

$\boxtimes$