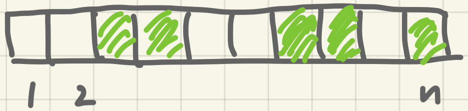
GDO 10 12.11.19

Satz 2.6 (Gale's Evenness Condition)

Für alle $n > d \geq 2$ ist $C_d(n)$ ein simpliziales d-Polytop mit n Ecken $\mu_d(1), \dots, \mu_d(n)$, und $S \in \binom{[n]}{d}$ induziert genau dann eine Facette von $C_d(n)$, wenn für alle $i, j \in [n] \setminus S$ $(i<j)$

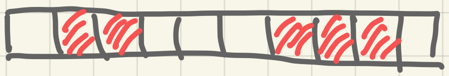
$$\#\{k \in S : i < k < j\} \text{ gerade ist.} \qquad (*)$$

Beispiel:



$d = 5$

$S \rightsquigarrow$ Facette



$S \rightsquigarrow$ keine Facette

Bem.:

- Lem. 1.15 $\Rightarrow$ Jede Teilmenge von $\{\mu_d(t) : t \in [n]\}$ der Kardinalität $\leq d+1$ ist affin unabhängig; insbesondere hat keine Facette von $C_d(n)$ also mehr als d Ecken, daher ist jede Facette ein Simplex, $C_d(n)$ ist also simplizial.

- Sei $S \in \binom{[n]}{d}$, $S = \{i_1, \dots, i_d\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_d$

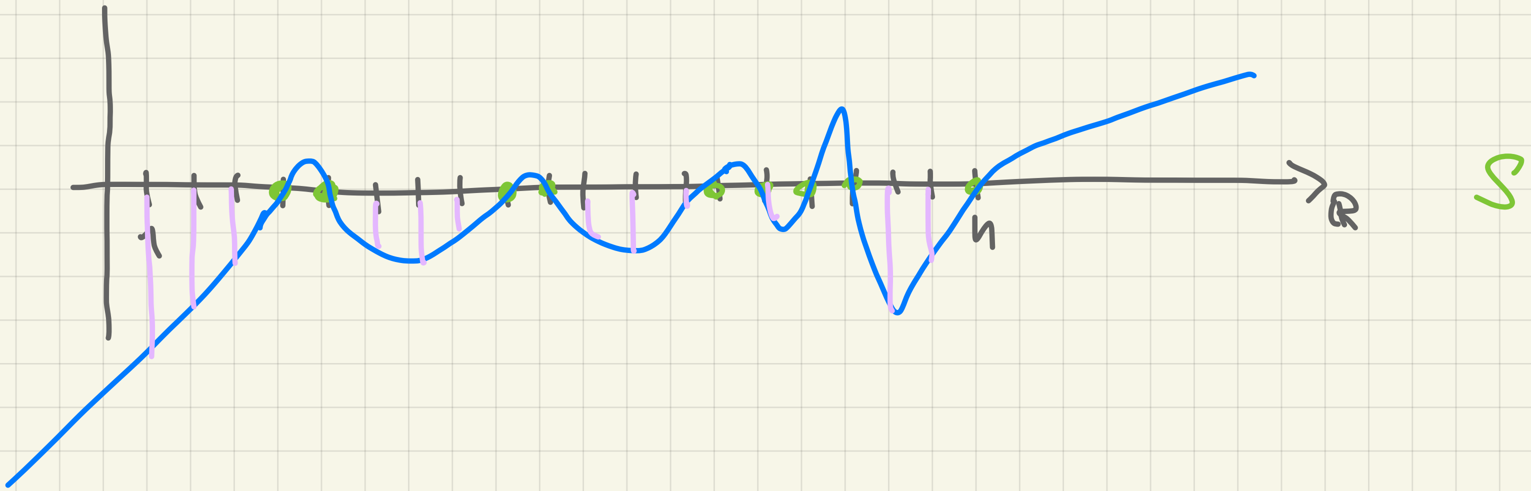
- Die affine Funktion $F_S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit

$$F_S(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x & \mu_d(i_1) & \cdots & \mu_d(i_d) \end{bmatrix}$$

ist <u>die</u> affine Funktion, die auf $\{\mu_d(i) : i \in S\}$ verschwindet.

- S induziert also genau dann eine Facette von $C_d(n)$, wenn $F_S(\mu_d(i))$ für alle $i \in [n] \setminus S$ das gleiche Vorzeichen hat.

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto F_S(\mu_d(t))$ ist eine Polynomabbildung vom Grad d und den Nullstellen $i_1 < \dots < i_d$, an denen die Abbildung jeweils das Vorzeichen wechselt; daraus folgt (*).



- Insbesondere ist für jedes $i \in [n]$ $\mu_d(i)$ eine Ecke von $C_d(n)$, da man eine Menge S und $i \in S$ konstruieren kann, die (*) erfüllt.

$\boxtimes$

Bem.: Die kombinatorische Struktur von $C_d(n)$ ist gleich der von

$$\operatorname{conv}\{\gamma_d(t) : t \in T\} \text{ für alle } T \in \binom{\mathbb{R}}{n}.$$

Korollar 2.7: Die Inzidenzvektoren (= charakteristische Vektoren) $G_d(n) \subseteq \{0,1\}^n$ der Facetten von $C_d(n)$ sind die Vektoren mit d Einsen, bei denen die nicht am Rand liegenden Eins-Blöcke gerade Länge haben.

Bsp.:

$$0\,0\,\boxed{1\,1}\,0\,\boxed{1\,1\,1\,1}\,0\,0\,\boxed{1\,1}\,0\,1\,1\,1 \quad \in G_d(n)$$

$$1\,1\,0\,0\,\boxed{1\,1\,1}\,0\,0\,\boxed{1\,1}\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \quad \notin G_d(n)$$

Kor. 2.8: $C_d(n)$ ist $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$-nachbarschaftlich, d.h. für jede Teilmenge T von Ecken von $C_d(n)$ mit $|T| \leq \lfloor d/2 \rfloor$ ist $\operatorname{conv}(T)$ eine Seite von $C_d(n)$.

Bem. 2.9: Ist P ein k-nachbarschaftliches Polytop mit $k > \frac{\dim(P)}{2}$, so ist P ein Simplex.

Kor. 2.10:

$$f_{d-1}(C_d(n)) = \binom{n - \lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} + \binom{n-1-\lceil \frac{d-1}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}$$

(insbesondere: $\forall d \; \exists \gamma_d \; \forall n : f_{d-1}(C_d(n)) \geq \gamma_d \cdot n^{\lfloor d/2 \rfloor}$)

Bew.:

- $B_k(m) := \{ v \in \{0,1\}^m : \langle \mathbb{1}, v \rangle = 2k$ und alle Einsen in v treten in geraden Blöcken auf $\}$
- Konstruiere Bijektion
  $$\{ w \in \{0,1\}^{m-k} : \langle \mathbb{1}, w \rangle = k \} \longrightarrow B_k(m)$$
  durch Einfügen einer Eins hinter jeder Eins.
- Also $\# B_k(m) = \binom{m-k}{k}$.

- $\#\{v \in G_d(n) : \text{linker Randblock von } v \text{ ist gerade}\}$

$$= \begin{cases} \binom{n-\frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} & \text{falls } d \text{ gerade} \\[2ex] \binom{n-1-\frac{d-1}{2}}{\frac{d-1}{2}} & \text{falls } d \text{ ungerade} \end{cases} = \binom{n-\lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$$

- $\#\{v \in G_d(n) : \text{linker Randblock von } v \text{ ist ungerade}\}$

$$= \binom{n-1-\lceil \frac{d-1}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}$$

nach Elimination von $v_1 = 1$ ist das die obige Menge mit $n-1$ statt n und $d-1$ statt d