GDO II 18.11.19

**Kor. 2.11:** Die dual-zyklischen Polytope $C_d^\Delta(n) := (C_d(n))^\Delta$ sind einfache $d$-Polytope mit $f_{d-1}(C_d^\Delta(n)) = n$ Facetten und

$$f_0(C_d^\Delta(n)) = \binom{n - \lceil \frac{d}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} + \binom{n-1-\lceil \frac{d-1}{2} \rceil}{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} \geq \gamma_d \cdot n^{\lfloor d/2 \rfloor}$$

Ecken (wobei $\gamma_d \in \mathbb{R}_{>0}$ nur von $d$ abhängt).

**Einschub zur Asymptotik** [z.B.: GRAHAM, KNUTH, PATASHNIK: "Concrete Mathematics" (Buch)]

**STIRLING-Formel:** $m! = \Theta\left(\sqrt{m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m\right)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \Theta\left(\frac{\sqrt{n}\cdot\left(\frac{n}{\cancel{e}}\right)^{n}}{\sqrt{n-k}\cdot\left(\frac{n-k}{\cancel{e}}\right)^{n-k}\cdot\sqrt{k}\cdot\left(\frac{k}{\cancel{e}}\right)^{k}}\right)$$

$$= \Theta\left(\sqrt{\frac{n}{(n-k)\,k}}\cdot\frac{n^n}{(n-k)^{n-k}\cdot k^k}\right) = \Theta_k\left(n^k\right)$$

Falls $k$ konstant:

$$\sqrt{\frac{n}{(n-k)\,k}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{k}}$$

Konstanten dürfen von $k$ abhängen

$$= \Theta_k\left(\frac{n^n}{(n-k)^{n-k}}\right)$$

$$\| $$

$$\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}\cdot n^k$$

$$\left(1+\frac{k}{n-k}\right)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^k$$

$$\left(1+\frac{x}{\ell}\right)^{\ell} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} e^x$$

<u>Definition:</u> Für $0 \leq k \leq d$ sei $\mu_k(d,n)$ die größte Anzahl von $k$-Seiten eines $d$-Polytops mit $n$ Facetten.

<u>UPPER-BOUND-THEOREM (McMULLEN)</u>

$$\boxed{\mu_k(d,n) = f_k\left(C_d^\Delta(n)\right)}$$

Wir zeigen: $\mu_0(d,n) \leq 2 \cdot n^{\lfloor d/2 \rfloor}$

(⌊ basierend auf einem Beweis von SEIDEL)

<u>Beobachtung 2.12</u>

$\mu_k(d,n)$ wird von einfachen Polytopen angenommen.

[Perturbation von $b$ in $P^{\leq}(A,b)$]

**Bemerkung 2.13:** Ist $v$ eine Ecke eines einfachen Polytops $P$, und ist $W$ eine $k$-elementige Teilmenge der Nachbarn von $v$ (im von den 1-dim. Seiten gebildeten Graphen von $P$), so ist $P \cap \operatorname{aff}(\{v\} \cup W)$ eine $k$-Seite von $P$ (die von $v$ und $W$ bzw. von den Kanten von $v$ zu $W$ aufgespannt Seite).

**Definition:** Eine acyclic unique sink orientation (AUSO) eines Polytops $P$ ist eine azyklische Orientierung des Graphen von $P$, die in jeder (nicht-leeren) Seite von $P$ eine eindeutige Senke und eine eindeutige Quelle induziert.

**Beobachtung 2.14:** Für ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ erzeugt jedes lineare Funktional $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, das für $P$ in "allgemeiner Lage" ist (d.h. hier: $\varphi(v) \neq \varphi(w)$ für alle Ecken $v \neq w$ von $P$) ein Paar entgegengesetzt orientierter AUSO's mit:

$$\forall\ v - w : \quad v \longrightarrow w \iff \varphi(v) \left\{ \begin{matrix} > \\ \text{bzw.} \\ < \end{matrix} \right\} \varphi(w)$$

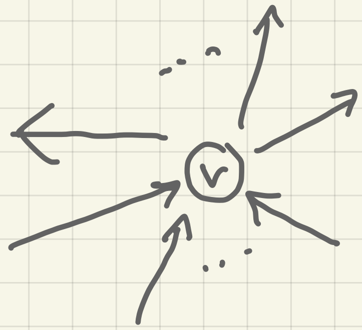
[Folgt daraus, dass der Simplex-Alg. für jede Startecke funktioniert.]

**Satz 2.15:**

$$\mu_0(d,n) \leq 2 \cdot n^{\lfloor d/2 \rfloor}$$

**Beweis:** • Es genügt, für jedes einfache $d$-Polytop $P$ mit $n$ Facetten eine Abbildung der Eckenmenge von $P$ in die Menge aller $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-dimensionalen Seiten von $P$ anzugeben, so dass keine dieser Seiten mehr als 2 mal als 'Bild' auftritt (wegen Bem. 2.11).

- Wähle eine beliebige AUSO von P.
- Ordne jeder Ecke v nun folgendermaßen eine $\lceil \frac{d}{2} \rceil$-dimensionale Seite $\sigma(v)$ zu:



  - Seien $W^{ein} / W^{aus}$ die Mengen der über rein/raus zeigenden Bögen zu v benachbarten Ecken.
  - Wähle $W \subseteq W^{ein}$ oder $W \subseteq W^{aus}$ mit $|W| = \lceil \frac{d}{2} \rceil$
    [möglich, da $|W^{ein}| + |W^{aus}| = d$]
  - $\sigma(v) :=$ von v und W aufgespannte Seite.
- Da v in $\sigma(v)$ Quelle oder Senke ist, wird keine Seite öfter als 2 mal zugeordnet. ∎