GDO 12 25.11.19

h-Vektoren und f-Vektoren

- Sei θ ein AUSO des einfachen d-Polytops P.
- Für $0 \le i \le d$ sei $h_i(\theta)$ die Anzahl der Ecken von P mit Ein-Grad i bzgl. θ.
- Für alle $0 \le k \le d$ gilt: $f_k(P) = \sum_{i=0}^{d} h_i(\theta) \cdot \binom{i}{k}$ (*)

k-dim. Seiten von P

- Definiere folgende Polynome in $\mathbb{R}[x]$

$$f^P := \sum_{k=0}^{d} f_k(P) \cdot x^k$$

$$h^\theta := \sum_{i=0}^{d} h_i(\theta) \cdot x^i$$

„Erzeugenden-Funktionen (= generating functions) von $(f_0(P), f_1(P), .., f_d(P))$ bzw. $(h_0(\theta), h_1(\theta), .., h_d(\theta))$“

$$\bullet\quad h^{\theta}(x+1) = \sum_{i=0}^{d} h_i(\theta)\cdot(x+1)^i = \sum_{i=0}^{d} h_i(\theta)\cdot\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\cdot x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{d}\underbrace{\left(\sum_{i=k}^{d}\binom{i}{k}\cdot h_i(\theta)\right)}_{f_k(P)} x^k$$

$$= f^P(x)$$

<u>Folgerung 7.1:</u>

$$h^{\theta} = f^P(x-1) = \sum_{k=0}^{d} f_k(P)\cdot(x-1)^k = \sum_{k=0}^{d} f_k(P)\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot(-1)^{k-i}\cdot x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{d}\underbrace{\left(\sum_{k=i}^{d}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\cdot f_k(P)\right)}_{\overset{!!}{=}\; h_i(P)}\cdot x^i$$

$$h_i(P) = h_i(\theta)$$

$\uparrow$ Koeffizientenvergleich

Insbesondere: h_i^θ hängt nicht von der Wahl von θ ab, sondern nur von P selbst.

Definition: Der h-Vektor eines einfachen d-Polytops P ist

$$h(P) := \big(h_0(P), h_1(P), \dots, h_d(P)\big).$$

Bem.: • Für alle AUSO's θ eines einfachen d-Polytops P ist

$$h(\theta) = h(P).$$

• Es gibt eine bijektive lineare Transformation von $\mathbb{R}^{\{0,1,\dots,d\}}$, welche für jedes einfache d-Polytop P $f(P)$ auf $h(P)$ abbildet.

Beobachtung: Für eine AUSO θ von P sei $\overleftarrow{\theta}$ die umgekehrte Orientierung.

Dann: $$h_i(P) = h_i(\overleftarrow{\theta}) = h_{d-i}(\theta) = h_{d-i}(P)$$

Definition: Der h-Vektor eines simplizialen Polytops P ist $h(P) := h(P^\Delta)$.

Satz 2.16 [DEHN-SOMMERVILLE Gleichungen]

Für den h-Vektor eines einfachen oder simplizialen d-Polytops P gilt:

$$h_i(P) = h_{d-i}(P) \qquad \forall i = 0, \dots, d \quad \left(\left\lceil \frac{d+1}{2} \right\rceil \text{ Gleichungen} \right)$$

- Für einfache d-Polytope P gilt $h_i(P) = \sum_{k=i}^{d} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_k(P)$.

- Für simpliziale d-Polytope P gilt:

$$h_i(P) \underset{2.16}{=} h_{d-i}(P) \underset{\text{Def.}}{=} h_{d-i}(P^\Delta) = \sum_{k=d-i}^{d} (-1)^{k-(d-i)} \binom{k}{d-i} \overbrace{\boxed{f_k(P^\Delta)}}^{= f_{d-1-k}(P)}$$

$$\underset{d-k-1 \to k}{=} \sum_{k=-1}^{i-1} (-1)^{i-k-1} \binom{d-k-1}{d-i} f_k(P)$$

• Insbesondere: $h_d(P) = f_{d-1}(P) - f_{d-2}(P) + f_{d-3}(P) - f_{d-4}(P) + \dots + (-1)^{d-1} f_0(P) + (-1)^d$

$$\begin{array}{c} h_d(P) \\ \| \\ 1 \end{array}$$

<u>Korollar 2.17:</u> [EULER-POINCARÉ-Formel, simplizial]

Für simpliziale d-Polytope liefert die Dehn-Sommerville-Gleichung $h_0(P) = h_d(P) = 1$ folgende Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k f_k(P) = 1 - (-1)^d$$

<u>Bem. 2.18:</u> (i) Die Euler-Poincaré Formel gilt auch für alle nicht-simplizialen Polytope.

(ii) Für $d=3$: $f_0(P) - f_1(P) + f_2(P) = 2$

Allgemein gilt für jede triangulierte (orientierbare) Fläche vom Geschlecht g:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2 \cdot (1-g)$$

(iii) Die affine Hülle aller f-Vektoren von simplizialen (einfachen) d-Polytopen ist durch die Dehn-Sommerville Gleichungen beschrieben.