GDO 13 26.11.19

2.2 Graphen von Polytopen

Definition: Seien $n > d \geq 2$

(i) $\Delta(d,n)$ sei das Minimum aller $\delta \in \mathbb{N}$ mit: Für jedes Paar v, w von Ecken eines d-dimensionalen Polytops mit n Facetten gibt es einen v-w-Weg im Graphen von P mit $\leq \delta$ Kanten.

(ii) $\vec{\Delta}(d,n)$ sei das Minimum aller $\delta \in \mathbb{N}$ mit: Für jede Ecke v eines d-Polytops P mit n Facetten und für jede durch eine lineare Funktion in für P allgemeiner Lage induzierte Orientierung des Graphen von P mit Senke t gibt es einen gerichteten v-t-Weg mit $\leq \delta$ Bögen.

Beob. 2.19:

(i) $$\Delta(d,n) \leq \vec{\Delta}(d,n)$$

(ii) Falls es eine polynomiale Pivot-Regel für den Simplex-Algorithmus gibt, so ist $\vec{\Delta}(d,n)$ polynomial beschränkt.

HIRSCH-VERMUTUNG [WARREN M. HIRSCH 1957]

$$\Delta(d,n) = n-d$$

Bem. 2.20:

SANTOS widerlegt die Hirsch-Vermutung in 2010;
$\Delta(d,n) \leq 2n$ ist aber immer noch gut möglich.

POLYNOMIALE HIRSCH-VERMUTUNG:

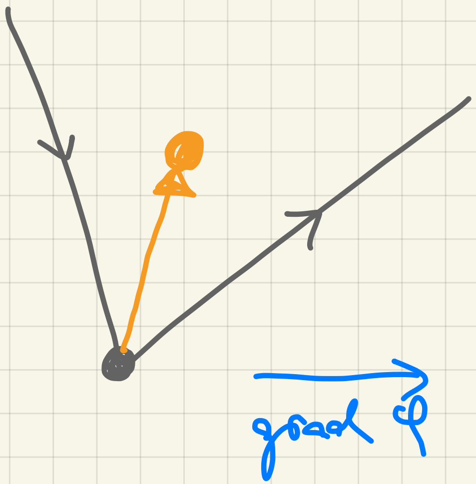
$$\Delta(d,n) \overset{?}{\leq} \mathrm{poly}(n,d)$$

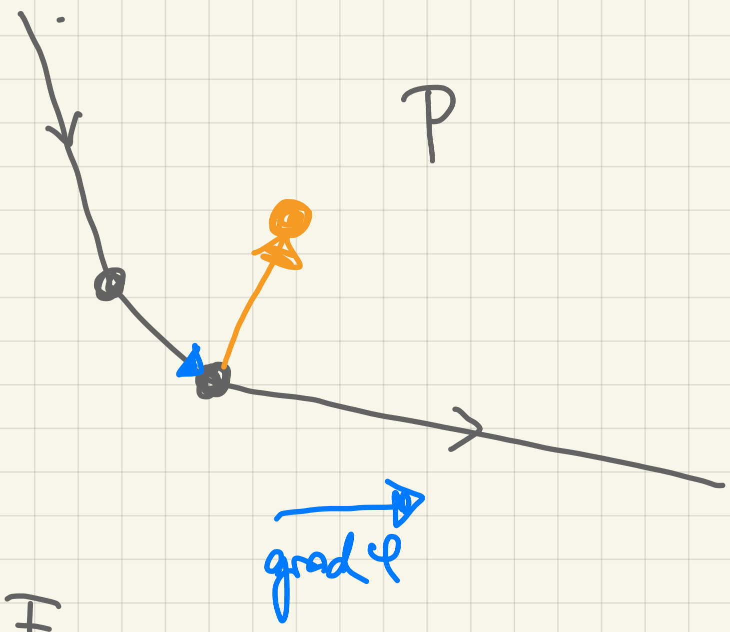
Satz 2.21 [KALAI 1992]

$$\vec{\Delta}(d,n) \leq 2n \cdot n^{\log d} \qquad \left(\leq n^{\log d + 2} \right)$$

(Man kann den Faktor $2n$ noch entfernen durch geschickten Auflösung der Rekursion am Ende des Beweises ⇝ TODD 2014.)

Definition: Sei v eine Ecke des Polyeders P und φ ein lineares Funktional in allgemeiner Lage für P (d.h. hier: φ ist auf keinem affinen 1-dimensionalen Unterraum, der durch ein Teil-Gleichungssystem eines P irredundant beschreibenden Ungleichungssystems definiert ist, konstant). Falls $\sup\{\varphi(x) : x \in P\} = +\infty$, so füge man bzgl. φ gerichteten Graphen von P eine Senke hinzu, die über die den bzgl. φ positiv orientierten Extremalstrahlen entsprechenden Bögen verbunden wird.





(i) $\mathcal{A}(P, v, \varphi)$ sei die Menge aller Facetten F von P mit $\sup\{\varphi(x) : x \in F\} > \varphi(v)$ (die für v aktiven Facetten).

(ii) $\delta(P, v, \varphi)$ sei die minimale Länge eines gerichteten Weges von v zur Senke.

<u>Definition:</u> $H(d, n) := \max \{ \delta(P, v, \varphi) :$ P d-Polyeder, φ lineares Funktional in allg. Lage für P, $v \in$ Ecke von P, $|\mathcal{A}(P, v, \varphi)| \leq n \}$

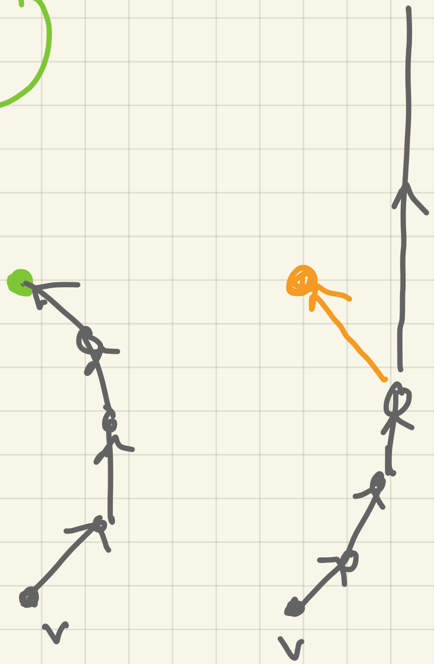
Beweis von Satz 2.21

- Wegen $\vec{\Delta}(d,n) \le H(d,n)$ genügt es, zu zeigen:

$$\boxed{H(d,n) \le 2n \cdot n^{\log d} \quad (\text{für } d \ge 2)} \quad !$$

- Klar ist:
  - $H(2,n) \le n$
  - $H(d,0) = H(d,1) = \dots = H(d,d-2) = 0$

    [Ein aus v heraus zeigender Bogen liegt in $\ge d-1$ aktiven Facetten.]



- Wir leiten folgende rekursive Abschätzung her:

$$H(d,n) \le \underbrace{H\left(d,\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + H(d-1,n-1) + H\left(d,\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil\right)}_{\overset{!!}{=}\ h(d,n)} \qquad (*)$$

- Seien P, v, φ wie oben und $|\mathcal{A}(P, v, \varphi)| \leq n$; zu zeigen (für (*)) ist:

$$\delta(P, v, \varphi) \leq h(d, n) \qquad (**)$$