$\boxed{\text{GDO 14 2.12.19}}$

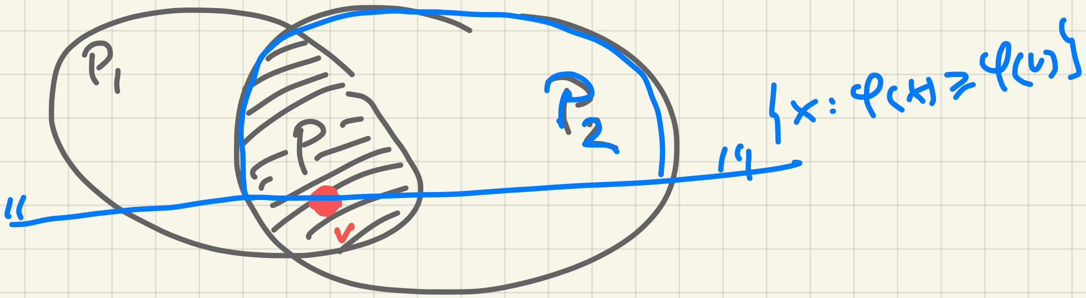
- Teile $\mathcal{A} := \mathcal{A}(P, v, \varphi)$ so in $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ auf, dass:

  - $\sup \varphi(F_1) \geq \sup \varphi(F_2) \quad \forall F_1 \in \mathcal{A}_1, F_2 \in \mathcal{A}_2$
  - $|\mathcal{A}_1| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \quad |\mathcal{A}_2| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$

- Für (**) genügt es, zu zeigen, dass man von v aus in $\leq H(d, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ gerichteten Schritten eine Facette $F \in \mathcal{A}_1$ oder die Senke erreichen kann. (***)
  [Denn es genügen $H(d-1, n-1)$ Schritte, um die lokale Senke von F zu finden, und diese hat (global bzgl. P) dann $\leq |\mathcal{A}_1 \setminus \{F\}| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ aktive Facetten.]

- Seien $P = P^{\leq}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^d$ und $A_1 x \leq b_1$ bzw. $A_2 x \leq b_2$ die zu $\mathcal{A}_1$ bzw. $\mathcal{A}_2$ korrespondierenden Subsysteme von $Ax \leq b$; definiere

$$P_1 := P^{\leq}(A_1, b_1) \quad \text{und} \quad P_2 := P^{\leq}(A_2, b_2) \cap \{x : \varphi(x) \geq \varphi(v)\}$$



- Wir können annehmen, dass v Ecke von P_2 ist.

  [Wir können annehmen, dass v nicht die Senke von P ist; also gibt es eine aus v heraus gerichtete Kante (Extremalstrahl) e, also $d-1$ linear unabhängige Zeilen von $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, so dass das zugehörige Gleichungssystem die Lösungsmenge $\mathrm{aff}(e)$ hat. Ist eine dieser Zeilen aus A_1, so liegt v in der entsprechenden Facette von $\mathcal{A}_1$ — und nichts ist zu zeigen. Andernfalls zeigen diese Zeilen zusammen mit $\varphi(x) \geq \varphi(v)$, dass v Ecke von P_2 ist, da φ in allgemeiner Lage ist.]

- Es gilt: $\left|\mathcal{A}(P_2, v, \varphi)\right| \leq \left|\mathcal{A}_2\right| + 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

- Sei Π ein gerichteter (bzgl. φ) Weg der Länge $\leq \delta(P_2, v, \varphi) \leq H(d, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ von v zur Senke im Graphen von P_2.
- Wird auf dem Weg Π keine Ungleichung von $A_1 x \leq b_1$ verletzt, so sind wir fertig; andernfalls ist eine Facette F, welche zu einer ersten Ungleichung aus $A_1 x \leq b_1$ gehört, die auf dem Weg Π verletzt wird, eine $\mathcal{A}_1$, und der letzte Punkt in Π, der $A_1 x \leq b_1$ noch erfüllt, ist eine Ecke von F.
- Damit ist (~~***~~) gezeigt.
- Wir haben also bewiesen:

$$H(d,n) \leq H(d, \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor) + H(d-1, n-1) + H(d, \lceil \tfrac{n}{2} \rceil),$$

also

$$H(d,n) \leq H(d-1, n-1) + 2 \cdot H(d, \lceil \tfrac{n}{2} \rceil)$$

- Insbesondere für $t \in \mathbb{N}, t \geq 1$:

$$H(d, 2^t) \leq H(d-1, 2^t) + 2\, H(d, 2^{t-1}) \qquad (d \geq 3, t \geq 1)$$

- Mit $f(d,t) := \dfrac{H(d, 2^t)}{2^t}$ $\qquad (d \geq 2, t \geq 0)$

$$(\#) \quad f(d,t) \leq f(d-1,t) + f(d,t-1) \qquad (d \geq 3, t \geq 1)$$

- Wir zeigen per Induktion nach d:

$$(\#\#) \quad f(d,t) \leq \binom{d+t-2}{d-1} \qquad (d \geq 2, t \geq 1)$$

- $\underline{d=2:}$ $\quad f(2,t) = \dfrac{H(2, 2^t)}{2^t} \leq \dfrac{2^t}{2^t} = 1 \leq \binom{t}{1}$

- $\underline{d \geq 3:}$ Induktion nach $t = 0, 1, \ldots$

  $\underline{t=0:}$ $\quad f(d,t) = \dfrac{H(d,1)}{1} = H(d,1) \underset{[d \geq 3]}{=} 0 = \binom{d-2}{d-1}$

$t \geq 1$: $$f(d,t) \underset{(\#)}{\leq} \underbrace{f(d-1,t)}_{\text{n. Ind. nach } d} + \underbrace{f(d,t-1)}_{\text{n. Ind. nach } t} = \binom{d+t-2}{d-1}$$

$$\binom{d+t-3}{d-2} \qquad \binom{d+t-3}{d-1}$$

$$\left[\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k} \right]$$

- Also für alle $d \geq 2$, $n \geq 0$:

$$H(d,n) \leq H\left(d, 2^{\lfloor \log n \rfloor + 1}\right) = \underbrace{2^{\lfloor \log n \rfloor + 1}}_{\leq 2n} \cdot f(d, \lfloor \log n \rfloor + 1)$$

$$\leq 2n \cdot \underbrace{\binom{d + \lfloor \log n \rfloor - 1}{d-1}}$$

$$\binom{d + \lfloor \log n \rfloor - 1}{\lfloor \log n \rfloor} \leq d^{\lfloor \log n \rfloor} \leq d^{\log n}$$

$$\left[\binom{m+k}{k} = \frac{m+k}{k} \cdot \frac{m+k-1}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{m+1}{1} \leq (m+1)^k \right]$$

• Also $H(d,n) \leq 2n \cdot \boxed{d^{\log n}}$

$n^{\log d}$

$$d^{\log n} = \left(2^{\log d}\right)^{\log n}$$
$$= 2^{(\log d)(\log n)}$$
$$= 2^{(\log n)(\log d)}$$
$$= \left(2^{\log n}\right)^{\log d}$$
$$= n^{\log d}$$