GDO 15 3.12.19

RANDOM FACET Pivot-Regel

- "Eingabe":
  - Einfaches d-Polytop P
  - Lineares Funktional φ in allg. Lage für P
  - Ecke v von P

- Für jede Seite $F \neq \emptyset$ von P sei $\mathrm{opt}(F)$ die φ-maximale Ecke.

- Algorithmus $RF(P, v, \varphi)$

(PIVOT-Schritt)

(1) Falls $v = \mathrm{opt}(P)$: STOP (Ausgabe v)
(2) Falls $\dim(P) = 1$: STOP (Ausgabe die andere Ecke von P)
(3) Wähle $F^* \in \{F \in \mathcal{A}(P, v, \varphi) : v \in F\}$ gleichverteilt zufällig
(4) $w \leftarrow RF(F^*, v, \varphi)$
(5) Ausgabe $(RF(P, w, \varphi))$
(6) STOP

Satz 2.22 [KALAI 92]

Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle Eingaben der Erwartungswert der Anzahl der Pivot-Schritte von RF höchstens

$$\exp\left(C \cdot \sqrt{n \cdot \log d}\right)$$

ist.

Bemerkungen zur Schranke $\rho(d,n) := \exp\left(C \cdot \sqrt{n \log d}\right)$

z.B. für $n = 2d$:

$$\rho(d, 2d) = \exp\left(O\left(\sqrt{d \log d}\right)\right)$$

Im Vergleich zur Schranke

$$O\left(n^{d/2}\right) = O\left((2d)^{d/2}\right) = \exp\left(O(d \log d)\right)$$

aus dem Upper-Bound-Theorem.

Beweis zu Satz 2.22

- Sei $g(d,n)$ das Maximum aller Erwartungswerte von Anzahlen von Pivot-Schritten von RF für d-Polytope P, lineare Funktionale φ und Startecken v mit $|\mathcal{A}(P,v,\varphi)| \leq n$.
- Klar sind
$$g(1,n) \leq 1 \qquad \forall n$$
$$g(d,n) \leq 0 \qquad \forall n \leq d-2$$
- Sei $\underline{d \geq 2}$
- Um eine rekursive Abschätzung für $g(d,n)$ herzuleiten, seien P, φ, v wie oben mit $v \neq opt(P)$.
- Sortiere die d Facetten $F_1, \dots, F_d$, die v enthalten, so, dass
$$\varphi(opt(F_1)) \leq \varphi(opt(F_2)) \leq \dots \leq \varphi(opt(F_d)).$$

- Weil $v \neq \mathrm{opt}(P)$: $F_2, \ldots, F_d \in \mathcal{A}(P, v, \varphi)$
- Ist $F^* = F_i$, so gilt $|\mathcal{A}(P, w, \varphi)| \leq n - i$
- $\forall i$: $\mathbb{P}[F^* = F_i] \leq \frac{1}{d-1}$

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}[\text{Anzahl Pivot-Schritte in (5)}] \leq \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d-1} \cdot g(d, n-i)$$

Also:
$$\boxed{g(d,n) \leq g(d-1, n-1) + \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{d-1} \cdot g(d, n-i)}$$

Aus dieser rekursiven Abschätzung kann man

$$g(d,n) \leq \exp\left(C \cdot \sqrt{n \cdot \log d}\right)$$

herleiten.

Bem.: Vgl. $\boxed{}$ und $\boxed{H(d,n) \leq H(d-1, n-1) + 2\, H\left(d, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}$

$$\rightsquigarrow \quad \leq \exp\left(C' \cdot \log n \cdot \log d\right)$$