GDO 17 16.12.19

<u>Definition:</u> Sei $P = P^{\le}(A,b) \subseteq \mathbb{R}^d$ ein einfaches d-Polytop.

(i) $V(P)$ sei die Menge der Ecken von P.

(ii) Für alle $v \in V(P)$ seien

$\{i : \langle A_{i,*}, v \rangle = b_i\}$

$$C(v) := \operatorname{ccone}\{A_{i,*} : i \in Eq(v)\}$$ der Normalenkegel von v

und $S(v) := C(v) \cap B^d$ („sphärischer Kegel" = Schnitt von Kegel und B^d)

und $B^d := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \le 1\}$

(iii) Für $\mathcal{U} \subseteq V(P)$ seien $S(\mathcal{U}) := \bigcup_{v \in \mathcal{U}} S(v)$ und

$$N(\mathcal{U}) := \{w \in V(P) \setminus \mathcal{U} : \exists v \in \mathcal{U} : w \text{ Nachbar von } v\}$$

<u>Bem. 2.26:</u> (i) Für $v, w \in V(P)$ mit $v \neq w$ ist $\mathrm{int}(S(v)) \cap \mathrm{int}(S(w)) = \emptyset$.

(ii) Für alle $\mathcal{U} \subseteq V(P)$ ist $\mathrm{vol}(S(\mathcal{U})) = \sum_{v \in \mathcal{U}} \mathrm{vol}(S(v))$

<u>Lem. 2.27:</u> Seien P und Δ wie in Satz 2.24 und $\mathcal{U} \subseteq V(P)$ so, dass $\mathrm{vol}(S(\mathcal{U})) \leq \frac{1}{2} \mathrm{vol}(B^d)$. Dann ist

$$\mathrm{vol}(S(N(\mathcal{U}))) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 \cdot d^{2.5}} \cdot \mathrm{vol}(S(\mathcal{U})).$$

<u>Zunächst Beweis von Satz 2.24 mittels Lem. 2.27:</u>

- Wir können annehmen, dass $Ax \leq b$ irredundant ist.
- Wir definieren für $v \in V(P)$ $\mathcal{U}_0(v) := \{v\}$ und

$$\mathcal{U}_j(v) := \mathcal{U}_{j-1}(v) \cup N(\mathcal{U}_{j-1}(v)) \text{ für alle } j \geq 1.$$

- Wegen Bem. 2.26 (ii) gilt:

$$\mathrm{vol}\left(S(U_j(s))\right) + \mathrm{vol}\left(S(U_j(t))\right) > \mathrm{vol}\left(B^d\right)$$

$$\Rightarrow \quad U_j(s) \cap U_j(t) \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$ Es gibt einen s-t-Weg mit $\leq 2j$ Kanten.

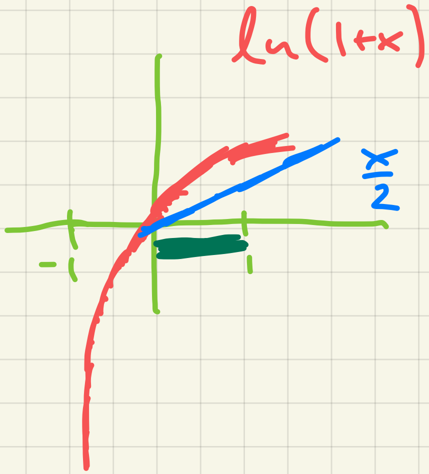
- Daher genügt es, zu zeigen, dass $\bar{j} \in O\left(\Delta^2 \cdot d^{3.5} \cdot \log d\Delta\right)$ existiert mit

$$(*) \qquad \mathrm{vol}\left(S(U_{\bar{j}}(v))\right) > \frac{1}{2}\mathrm{vol}\left(B^d\right) \quad \text{für alle } v \in V(P).$$

- Nach Lem. 2.27 gilt für alle $v \in V(P)$ und j mit

$$\mathrm{vol}\left(S(U_j(v))\right) \leq \frac{1}{2}\mathrm{vol}\left(B^d\right):$$

$$\mathrm{vol}\left(S(U_j(v))\right) = \mathrm{vol}\left(S(U_{j-1}(v))\right) + \mathrm{vol}\left(S(N(U_{j-1}(v)))\right)$$



$$\geq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 \cdot d^{2.5}}\right) \mathrm{vol}\left(S(U_{j-1}(v))\right)$$

$$\geq \dots \geq$$

$$\geq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 \cdot d^{2.5}}\right)^j \cdot \mathrm{vol}\left(S(U_0(v))\right)$$

$$\Longrightarrow \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 \cdot d^{2.5}}\right)^j \cdot \mathrm{vol}\left(S(U_0(v))\right) \leq \frac{1}{2} \mathrm{vol}(B^d) < 2^d \left(= \mathrm{vol}\, [-1,+1]^d\right)$$

$$\Longrightarrow j \cdot \underbrace{\ln\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 \cdot d^{2.5}}\right)}_{\geq \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \Delta^2 \cdot d^{2.5}}} \leq \ln \frac{2^d}{\mathrm{vol}(S(U_0(v)))}$$

$\ln(1+x) \geq \frac{x}{2} \quad \forall x \in [0,1]$

$$\Longrightarrow j \leq \sqrt{2\pi} \cdot \Delta^2 \cdot d^{2.5} \cdot \ln \frac{2^d}{\mathrm{vol}(S(U_0(v)))} \qquad (**)$$

· Um eine untere Schranke an $\mathrm{vol}(\underbrace{S(v_0, c(v))}_{S(v)})$ zu erhalten:

- $S := \mathrm{conv}\left(\{0\} \cup \{A_{i,*} : i \in Eq(v)\}\right) \subseteq C(v)$

- S ist ein d-Simplex und

Spaltenvektor

$$\mathrm{vol}(S) = \underbrace{\left|\det\left[A_{i,*} : i \in Eq(v)\right]\right|}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\mathrm{vol}\left(\mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\}\right)}_{= \frac{1}{d!}}$$

A ganzzahlig

Für Permutation $\sigma : [d] \to [d]$:

$$\Sigma(\sigma) = \{x \in \mathbb{R}^d : 0 \leq x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq \dots \leq x_{\sigma(d)} \leq 1\}.$$

→ $\bigcup_{\sigma} \Sigma(\sigma) = [0,1]^d$

→ $\mathrm{int}(\Sigma(\sigma_1)) \cap \mathrm{int}(\Sigma(\sigma_2)) = \emptyset$ für $\sigma_1 \neq \sigma_2$

→ $\Sigma(\sigma_1)$ und $\Sigma(\sigma_2)$ gehen durch Koordinaten-Permutation aus einander hervor, also haben alle $\Sigma(\sigma)$ gleiches Volumen

→ Also gilt $\mathrm{vol}(\Sigma(\sigma)) = \frac{1}{d!}$ für alle σ, insbesondere für $\sigma = \mathrm{id}$.

→ $\Sigma(\mathrm{id}) = \mathrm{conv}\left\{ \begin{matrix} 00\cdots000 \\ 00\cdots001 \\ 00\cdots011 \\ \vdots \\ 11\cdots111 \end{matrix} \right\}$

→ $M \cdot \mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\} = \Sigma(\mathrm{id})$ mit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}$

→ Wegen $|\det(M)| = 1$ also $\mathrm{vol}(\mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_d\}) = \frac{1}{d!}$