$\boxed{\text{GDO 18 17.12.19}}$

- $\alpha := \max\{\|A_{i,*}\|_2 : i \in Eq(v)\} \leq \sqrt{d \cdot \Delta^2} = \sqrt{d} \cdot \Delta$

- $\frac{1}{\alpha} \cdot S \subseteq S(v) = S(\mathcal{U}_0(v))$

$$\Rightarrow \operatorname{vol}(S(\mathcal{U}_0(v))) \geq \operatorname{vol}\left(\frac{1}{\alpha} \cdot S\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^d \cdot \underbrace{\operatorname{vol}(S)}_{\geq \frac{1}{d!}}$$

$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{d} \cdot \Delta}\right)^d \cdot \frac{1}{d!} = \frac{1}{d^{d/2} \cdot \Delta^d \cdot d!}$$

- Wegen (**) und (*) also spielt von

$$j := \left\lceil 1 + \sqrt{2\pi} \cdot \Delta^2 \cdot d^{2.5} \cdot \underbrace{\ln\left(2^d \cdot d^{d/2} \cdot d! \cdot \Delta^d\right)}_{\leq \ln (d^3)^d \cdot \Delta^d \leq 3 \cdot d \cdot \ln(d\Delta)} \right\rceil$$

$$\leq O\left(\Delta^2 \cdot d^{3.5} \cdot \ln d\Delta\right)$$

Beweis zu Lem. 2.27

Zu zeigen: Für $U \subseteq V(P)$ mit $\mathrm{vol}(S(U)) \leq \frac{1}{2}\mathrm{vol}(B^d)$ gilt

$$\mathrm{vol}(S(N(U))) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta^2 \cdot d^{2.5}} \cdot \mathrm{vol}(S(U)) \qquad (\#)$$

- Sei $\partial(B^d) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$ (Sphäre = Rand von B^d)
- Für einen sphärischen Kegel $S \subseteq B^d$ sei
  - $B(S) := \mathrm{vol}_{d-1}(S \cap \partial(B^d))$ ($d-1$-dim. Volumen der "Basis" von S)
  - $D(S) := \mathrm{vol}_{d-1}(\underbrace{\partial(S)}_{\text{Rand von } S} \setminus \partial(B^d))$ (——— der "anderen Flächen" von S)
  - $L(S) := \mathrm{vol}_{d-2}$(relativer Rand von $S \cap \partial(B^d)$ in $\partial(B^d)$)

- Es gelten: $$\mathrm{vol}_d(S) = \frac{B(S)}{d}$$ $$D(S) = \frac{L(S)}{d-1}$$ (k)

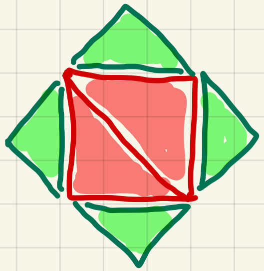
- Für $v, w \in V(P)$ $(v \neq w)$ gilt:

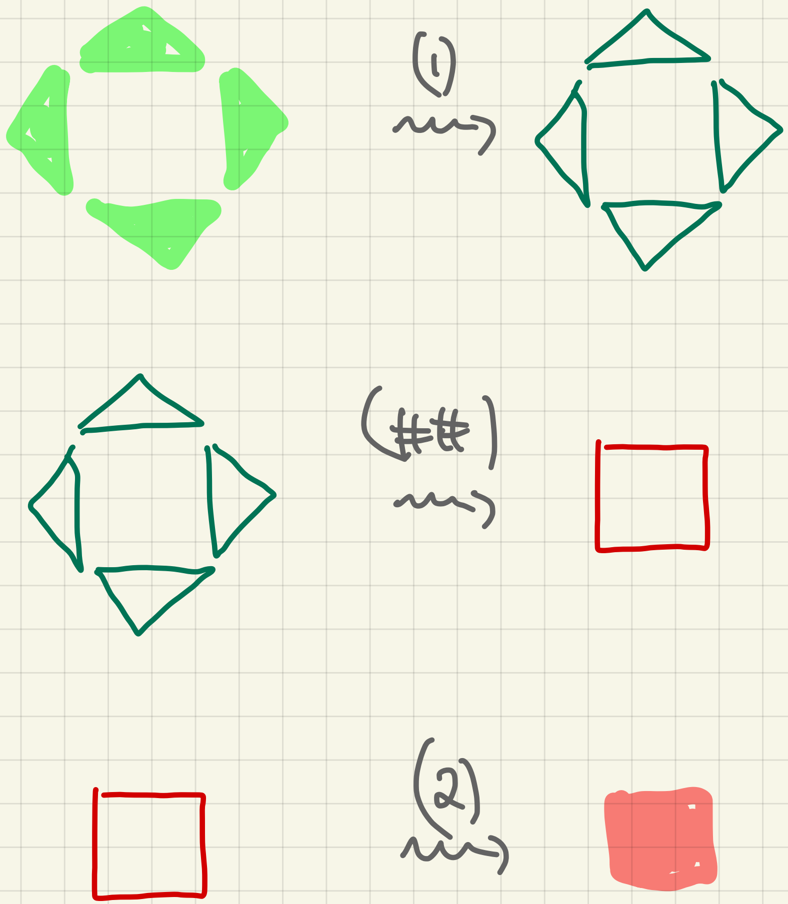
  v Nachbar von w $\Leftrightarrow$ $S(v)$ und $S(w)$ haben gemeinsame Facette

- Also: $$D(S(u)) \leq \sum_{v \in N(u)} D(S(v)) \qquad (\#\#)$$

Beweisgang (Skizze):

$\color{red}{U}$ $\quad$ $\color{green}{N(U)}$





Wir zeigen:

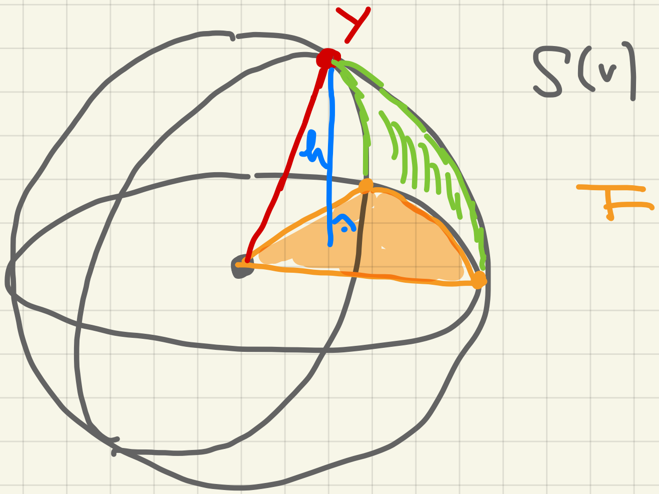
(1) $\forall_{v \in V(P)}: \quad \dfrac{\mathcal{D}(S(v))}{\mathrm{vol}_d(S(v))} \leq \Delta^2 \cdot d^3$

(2) $\forall S \subseteq B^d$ sphärische Kegel, $\mathrm{vol}_d(S) \leq \frac{1}{2} \mathrm{vol}_d(B^d)$: $\quad \dfrac{\mathcal{D}(S)}{\mathrm{vol}_d(S)} \geq \sqrt{\dfrac{2d}{\pi}}$

Daraus folgt dann (#) wegen

$$\Delta^2 \cdot d^3 \cdot \mathrm{vol}_d(S(N(u))) \underset{(1)}{\geq} \sum_{v \in N(u)} \mathcal{D}(S(v)) \underset{\substack{(\#\#) \\ (2)}}{\geq} \sqrt{\frac{2d}{\pi}} \cdot \mathrm{vol}_d(S(u))$$

Zu (1): • Sei F eine Facette von $S(v)$ und y die Ecke von $S(v)$, die nicht in F liegt.



• $Q := \operatorname{conv}(F \cup \{y\}) \underset{\substack{\uparrow \\ [S(v) \text{ konvex}]}}{\subseteq} S(v)$

• $h(F) :=$ Euklidscher Abstand von y zu F (Höhe)

$$\Rightarrow \quad \operatorname{vol}_d(S(v)) \geq \operatorname{vol}_d(Q) = \frac{\operatorname{vol}_{d-1}(F) \cdot h(F)}{d}$$

- können annehmen: $y = \frac{1}{\|A_{1,*}\|} A_{1,*}$ und

$$\operatorname{lin}(F) = \operatorname{lin}\{A_{2,*}, \dots, A_{d,*}\}.$$

- Nach Cramers Regel gibt es $z \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit:

$$\langle A_{i,*}, z \rangle = 0 \quad \forall i = 2, \dots, d$$

$$\langle A_{1,*}, z \rangle \geq 1$$

$$\|z\|_\infty \leq \Delta$$

- Also: $h(F) = \left\langle \frac{1}{\|z\|_2} z, y \right\rangle$

$$= \frac{1}{\underbrace{\|z\|_2}_{\leq \sqrt{d}\,\Delta} \cdot \underbrace{\|A_{1*}\|_2}_{\leq \sqrt{d}\,\Delta}} \cdot \underbrace{\langle z, A_{1*} \rangle}_{\geq 1}$$

$$\geq \frac{1}{d \cdot \Delta^2}$$

- Also:

$$\frac{D(S(v))}{\mathrm{vol}_d(S(v))} = \sum_{\substack{F \text{ Facette} \\ \text{von } S(v)}} \frac{\mathrm{vol}_{d-1}(F)}{\mathrm{vol}_d(S(v))} \leq \sum_F \frac{d}{h(F)}$$

$$\leq d^2 \cdot \frac{1}{h(F)}$$

$$\leq d^2 \cdot d \cdot \Delta^2$$

$$= d^3 \cdot \Delta^2$$

<u>zu (2):</u> Folgt (mit einigen Überlegungen) aus Levy's isoperimetrischer Ungleichung für sphärische Geometrie. ∎