GDO 19 13.1.20

Kapitel 3: Erweiterte Formulierungen

3.1 Hintergrund und einführende Beispiele

Definition: Eine **Erweiterung** eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^p$ ist ein Polyeder $Q \subseteq \mathbb{R}^q$ zusammen mit einer linearen Abbildung $\pi: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ (**Projektion**) mit $\pi(Q) = P$. Die **Größe** der Erweiterung ist die Anzahl der Facetten von Q. Die kleinste Größe irgendeiner Erweiterung von P heißt die **Erweiterungskomplexität** $\mathrm{xc}(P)$ von P. ("extension complexity")

Bemerkung: Eine **erweiterte Formulierung** von P ist eine Beschreibung einer Erweiterung von P mit linearen Ungleichungen und Gleichungen.

Beobachtung 3.1: Sei (Q, π) eine Erweiterung von $P \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $\pi(y) = \Pi \cdot y$ für alle $y \in \mathbb{R}^q$ (für eine Matrix $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times q}$). Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}^p$

$$\sup\{\langle c, x\rangle : x \in P\} = \sup\{\underbrace{\langle c, \pi(y)\rangle}_{} : y \in Q\}$$

$$\langle c, \Pi \cdot y\rangle = c^T(\Pi y) = (c^T \Pi) y = \langle \Pi^T c, y\rangle$$

Also kann man lineare Optimierungsprobleme über P auf lineare Optimierungsprobleme über Q zurückführen.

Bemerkung 3.2

Ist $P = \mathrm{conv}(V)$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^p$, $|V| < \infty$, so ist

$$Q := \mathrm{conv}\{e_v \in \mathbb{R}^V : v \in V\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R}^V : \sum_{v \in V} y_v = 1,\ y_v \geq 0 \ \forall v \in V\}$$

($(|V|-1)$-dimensionaler Simplex in $\mathbb{R}^V$) eine Erweiterung von P mit $\pi(y) = \Pi \cdot y$ und $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times V}$ mit

$$V = \{\text{Spalten von } \Pi\}.$$

Insbesondere: $\quad xc(P) \leq \#$ Ecken von P

$\quad$ ($xc(P) \leq \#$ Facetten von P ist trivial)

Beispiel: $P = \operatorname{conv}\{\pm e_i : i \in [p]\}$ ("Kreuzpolytop")

$$P = \{x \in \mathbb{R}^p : \underbrace{x(I)}_{\substack{\shortparallel \\ \sum_{i \in I} x_i}} - x([p] \setminus I) \leq 1 \quad \forall I \subseteq [p] \}$$

hat 2^p Facetten und $2p$ Ecken (also $xc(P) \leq 2p$).

Beispiel: Parity-Polytop

- $P = \text{EVEN}(p) := \operatorname{conv}\{v \in \{0,1\}^p : \langle \mathbb{1}, v \rangle \in 2\mathbb{Z}\}$

$$= \{x \in [0,1]^p : \sum_{j \in J} (1 - x_j) + \sum_{j \in [p] \setminus J} x_j \geq 1 \quad \forall J \subseteq [p],\ |J| \in 2\mathbb{Z}+1\}$$