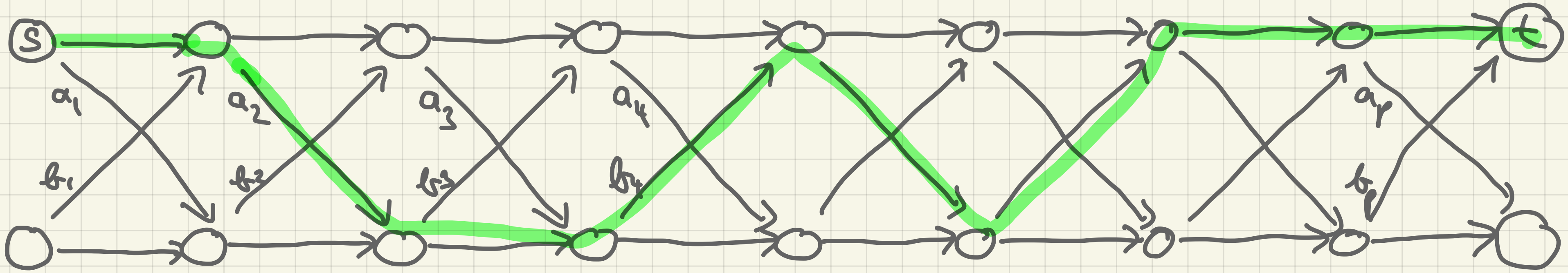
$\boxed{\text{GDO 20 14.1.20}}$

Erweiterte Formulierung von EVEN(p) nach [Carr & Konjevod 04]

Sei $D = (V, A)$ der folgende gerichtete Graph:



Seien $Q := \operatorname{conv}\{ \underbrace{\chi(T)}_{\text{charakteristische Vektor von } T \subseteq A} \in \{0,1\}^A : T \subseteq A \text{ s-t-Weg} \}$

und $\pi : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^p$ definiert via $\pi(y)_i := y_{a_i} + y_{b_i}$ für $i \in [p]$

Dann ist $\pi(Q) = \pi\left(\operatorname{conv}\{\chi(T) : T \subseteq A \text{ s-t-Weg}\}\right)$

$$= \operatorname{conv}\Big(\underbrace{\{\pi(\chi(T)) : T \subseteq A \text{ s-t-Weg}\}}_{\{v \in \{0,1\}^{V} : \langle \mathbb{1}, v\rangle \in 2\mathbb{Z}\}}\Big)$$

$$= \mathrm{EVEN}(p)$$

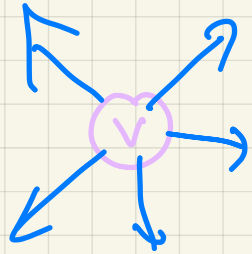
$$Q = \left\{ y \in \mathbb{R}^A : \begin{array}{ll} y_a \geq 0 & \forall a \in A \\ y(\delta^{aus}(v)) = y(\delta^{ein}(v)) & \forall v \in V \setminus \{s,t\} \\ y(\delta^{aus}(s)) = 1 & \end{array} \right\}$$

[vgl. KombOpt]

$\#$ Facetten von $Q \leq |A| = 4p$.

$\Rightarrow xc(\mathrm{EVEN}(p)) \leq 4p.$

$$\left(y(B) = \sum_{e \in B} y_e \right.$$



$$\left. \delta^{\text{out}}(v) \right)$$

Beispiel: Permutaeder

$$P = \mathrm{PERM}(p) = \mathrm{conv}\left\{ (\sigma(1), \dots, \sigma(p)) : \sigma \in S(p) \right\}, \text{ wobei}$$

$$S(p) = \left\{ \sigma : [p] \to [p] : \sigma \text{ bijektiv} \right\} \quad (\text{"Permutationen", "symmetrische Gruppe"})$$

$$P \underset{[RAP052]}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^p : \begin{array}{l} x([p]) = \dfrac{p(p+1)}{2} \\ x(I) \geq \dfrac{|I| \cdot (|I|+1)}{2} \quad \forall I \subsetneq [p] \end{array} \right\}$$

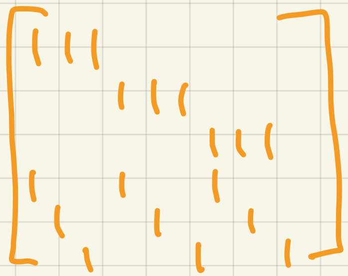
hat $2^p - 1$ Facetten.

$$Q := \mathrm{BIRK}(p) := \operatorname{conv}\left\{ Y(\sigma) \in \{0,1\}^{p\times p} : \sigma \in S(p) \right\} \quad \text{mit}$$

$$Y(\sigma)_{ij} = 1 \iff j = \sigma(i) \qquad (\text{"Permutationsmatrix"})$$

$$\pi : \mathbb{R}^{p\times p} \to \mathbb{R}^p \,, \quad \pi(Y)_i = \sum_{j=1}^{p} j \cdot Y_{ij} \qquad (i \in [p])$$

$$\Longrightarrow \quad \pi(\mathrm{BIRK}(p)) = \mathrm{PERM}(p)$$



ist TU

Birkhoff / v. Neumann:

$$\mathrm{BIRK}(p) = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{p\times p} : \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{p} Y_{ij} = 1 & \forall i \in [p] \\ \sum_{i=1}^{p} Y_{ij} = 1 & \forall j \in [p] \\ Y_{ij} \geq 0 & \forall i,j \in [p] \end{array} \right\}$$

("Die konvexe Hülle der Permutationsmatrizen ist genau die Menge der doppelt-stochastischen Matrizen.")

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{xc}(\mathrm{PERM}(p)) \leq p^2}$$

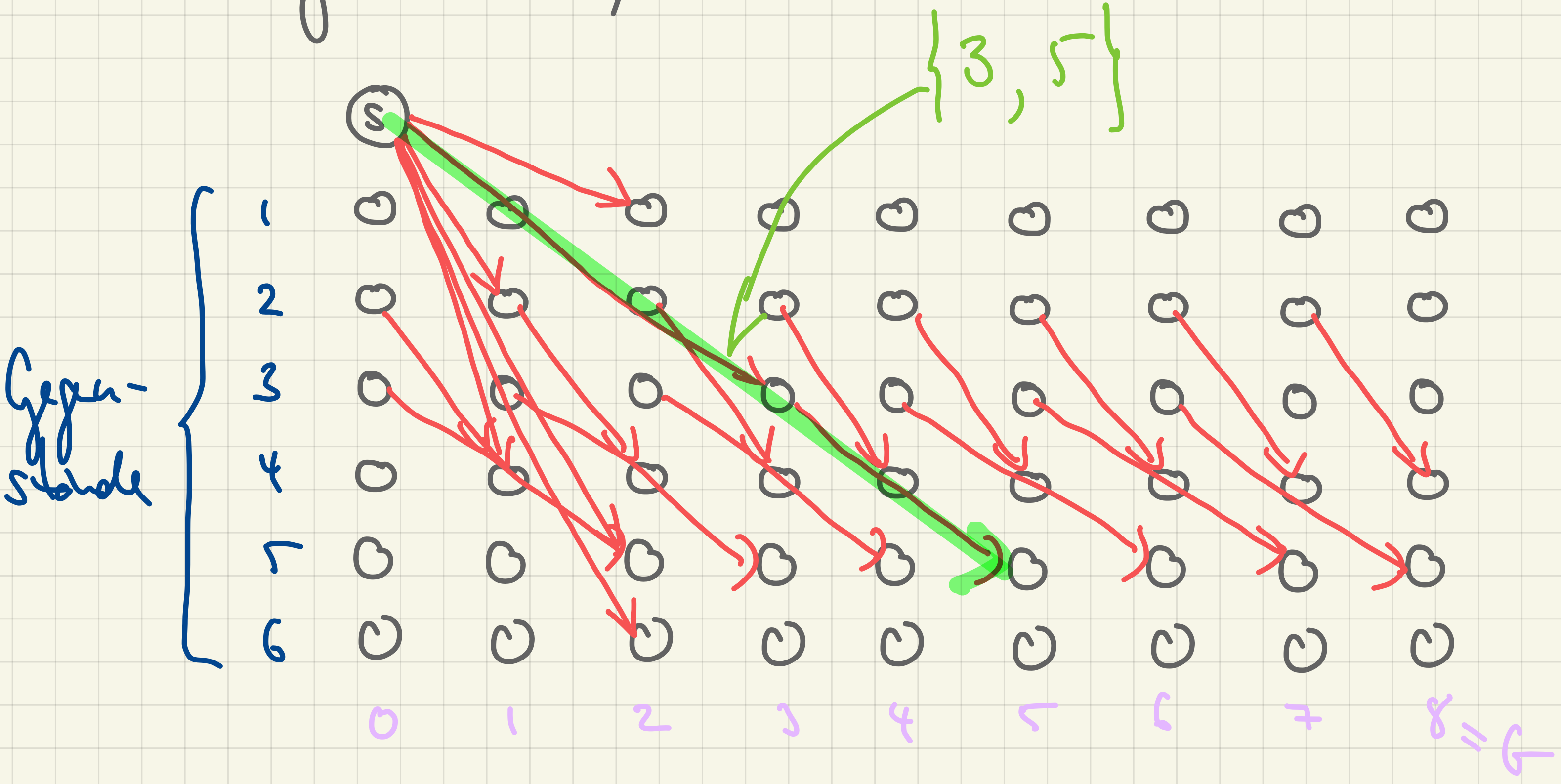
Beispiel: Knapsack

Für $g \in \mathbb{N}^p$, $G \in \mathbb{N}$ sei

$$P = \mathrm{KNAP}(g, G) = \mathrm{conv}\{v \in \{0,1\}^p : \langle g, v \rangle \le G\}$$

Sei $D(g, G) = (V, A)$ der folgendermaßen konstruierte azyklische gerichtete Graph (vgl. "Dynamische Programmierung" in VL KombOpt):

$$g = (2,1,3,1,2,2) \qquad G = 8$$



Regel zum Aufbau von (V,A):