$\boxed{\text{GdO 21 20.1.20}}$ (Weiter mit Knapsack-Beispiel aus VL 20)

$$Q := \operatorname{conv}\{\chi(T) : T \subseteq A \text{ Weg mit Startknoten } s\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R}^A : y \geq 0_A,\ y(\delta^{\text{out}}(s)) = 1,\ y(\delta^{\text{out}}(v)) \leq y(\delta^{\text{in}}(v)) \ \forall v \in V \setminus \{s\}\}$$

Koeffizientenmatrix ist TU

Für $i \in [p]$ sei $A(i)$ die Menge der Bögen, welche in Zeile i hinein zeigen. Definiere $\pi : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^p$ via

$$\pi(y)_i := y(A(i)) \quad \text{für alle } i \in [p].$$

Dann ist $\pi(Q) = P$ (Knapsack-Polytop).

Da Q mit $|A| + |V| - 1$ Ungleichungen beschrieben ist, gilt also

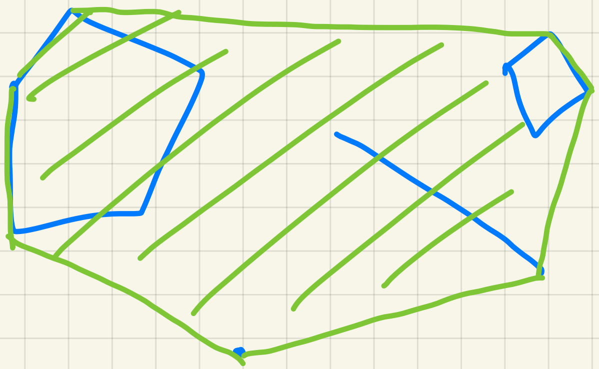
$$xc(P) \leq |A| + |V| - 1 \leq O(p^2 G)$$

ACHTUNG: Diese Schranke ist nicht polynomial in der Kodierungslänge von (g, G) !

OFT: Dynamischer Programmierungsalgorithmus mit Laufzeit $\leq L$ und Erweiterung der Größe $O(L)$

Disjunktionen von Polyedern

Seien $P_i = P^{\leq}(A_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}^p$ und $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i = 1, \dots, k)$ k Polytope in $\mathbb{R}^p$ und $P := \mathrm{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_k)$



$P = \mathrm{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_k)$

Es gilt:
$$P = \Big\{ x \in \mathbb{R}^p : \; x = x^1 + \dots + x^k$$
$$A_i \cdot x^i \leq \lambda_i b_i \qquad \forall i \in [k]$$
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$
$$\lambda_i \geq 0 \qquad \forall i \in [k] \Big\}$$

[Bew.: "$\subseteq$": Sei $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^i$ und $\lambda_i \geq 0$, $z^i \in P_i$ $(i \in k)$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Mit $x^i := \lambda_i z^i$ ist dann

$$x = \sum x^i, \quad A_i x^i = A_i \cdot \lambda_i z^i = \lambda_i \underbrace{A_i z^i}_{\leq b_i} \leq \lambda_i b_i$$

"$\supseteq$": Seien $x = x^1 + \dots + x^k$, $A_i x^i \leq \lambda_i b^i$ $(i \in [k])$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i \in [k])$$

Sei $K := \{ i \in [k] : \lambda_i > 0 \}$. Dann ist mit

$$z^i := \frac{1}{\lambda_i} x^i \quad (i \in K): \quad A_i z^i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \underbrace{A_i x^i}_{\leq \lambda_i b^i} \leq b^i \quad (i \in K)$$

$\Rightarrow z^i \in P_i$ $(i \in K)$

Es gilt: $x = \sum_{i=1}^{k} x^i$ und für $i \notin K$: $\lambda_i = 0$, also $Ax^i \leq 0 \cdot b_i = 0$

$\Rightarrow x^i \in \operatorname{char}(P_i) \underset{\uparrow}{=} \{0\}$

P_i Polytop

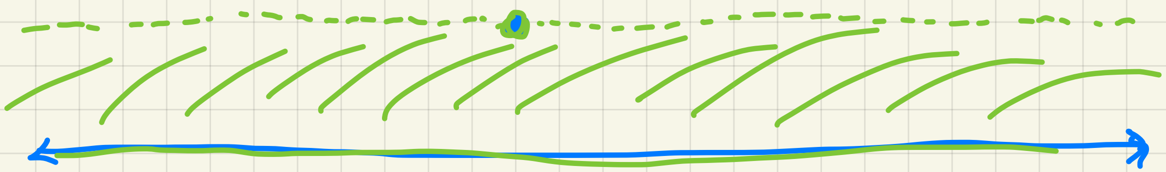
also $x = \sum_{i \in K} x^i = \sum_{i \in K} \lambda_i z^i$

$\sum_{i \in K} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ $(i \in K)$,

d.h. $x \in \operatorname{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_k)$]

<u>Insbesondere:</u> $xc(\operatorname{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_k)) \leq k + \sum_{i=1}^{k} m_i$

<u>Allgemeine Polyeder:</u> $\operatorname{conv}(P_1 \cup P_2)$ ist i.A. kein Polyeder



Allgemeines Theorem

$$xc\left(\overline{\operatorname{conv}\left(P_1 \cup \dots \cup P_k\right)}\right) \leq k + \sum_{i=1}^{k} xc(P_i)$$

Beispiel: Subtour-Relaxierung

- $K_n = (V_n, E_n)$ vollständiger Graph mit $|V_n| = n$ Knoten
- $TSP(n) := \operatorname{conv}\{ \chi(H) : H \subseteq E_n \text{ Hamilton-Kreis} \}$ ← jeder Knoten wird genau einmal besucht
- $$SUB(n) := \left\{ x \in [0,1]^{E_n} : \begin{array}{ll} x(\delta(v)) = 2 & \forall v \in V_n \\ x(\delta(S)) \geq 2 & \forall \emptyset \neq S \subsetneq V_n \end{array} \right\}$$

$$TSP(n) = \operatorname{conv}\left(SUB(n) \cap \mathbb{Z}^{E_n}\right)$$