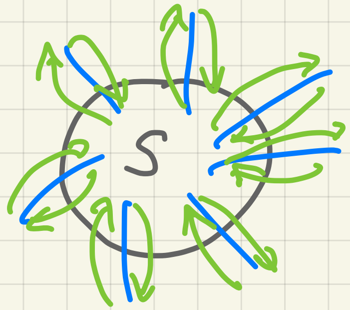
GDO 22 21.01.20

Sei $s_0 \in V_n$ beliebig festgelegt.

$$SUB(n) = \{ x \in [0,1]^{E_n} : x(\delta(v)) = 2 \quad \forall v \in V_n$$
$$x(\delta(S)) \geq 2 \quad \forall S \subsetneq V_n,\ s_0 \in S \} \supseteq TSP(n)$$

Sei $D_n = (V_n, A_n)$ der vollständige gerichtete Graph auf V_n; für $x \in \mathbb{R}^{E_n}$ sei $\overleftrightarrow{x} \in \mathbb{R}^{A_n}$ definiert durch

$$\overleftrightarrow{x}_{(v,w)} := x_{\{v,w\}} .$$



Für $x \in \mathbb{R}_+^{E_n}$ gilt:

$$x(\delta(S)) \geq 2 \quad \forall S \subsetneq V_n,\ s_0 \in S$$

$$\Leftrightarrow \quad \overleftrightarrow{x}(\delta^{aus}(S)) \geq 2 \quad \forall t \in V_n \setminus \{s_0\},\ S \subseteq V_n : s_0 \in S,\ t \notin S$$

$\Leftrightarrow$ [Max-Flow-Min-Cut] $\exists$ s_0-t-Fluss vom Wert ≥ 2, der die Kapazitäten $\overleftrightarrow{x}$ respektiert, $\forall t \in V_n \setminus \{s_0\}$.

Also: $SUB(n) = \Big\{ x \in [0,1]^{E_n} : \quad x(\delta(v)) = 2 \quad \forall v \in V_n$

$$y^{(t)}(\delta^{aus}(v)) = y^{(t)}(\delta^{ein}(v)) \quad \forall v \in V_n \setminus \{s_0, t\} \quad \forall t \in V_n \setminus \{s_0\}$$

$$y^{(t)}(\delta^{aus}(s_0)) - y^{(t)}(\delta^{ein}(s_0)) \geq 2 \quad \forall t \in V_n \setminus \{s_0\}$$

$$0 \leq y^{(t)}_{(u,v)} \leq x_{\{v,u\}} \quad \forall (u,v) \in A_n \quad \forall t \in V_n \setminus \{s_0\} \Big\}$$

$$\Rightarrow \quad xc(SUB(n)) \leq 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + 2 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n-1)$$

$$= O(n^3)$$

Spannbaum-Polytope

Def.: Für einen Graphen $G = (V, E)$ sei:

$$SPT(G) := \operatorname{conv}\{\chi(T) : \underbrace{T \subseteq E \text{ Spannbaum von } G}_{\text{(d.h. } (V,T) \text{ zusammenhängend und kreisfrei)}}\}$$

Bem.: $T \subseteq E$ Spannbaum $\iff |T| = |V| - 1$ und T ist kreisfrei

$(\iff |T| = |V| - 1$ und (V, T) zusammenhängend$)$

Erinnerung:

$$SPT(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^E_+ : x(E) = |V| - 1, \quad x(E(S)) \le |S| - 1 \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq V \right\}$$

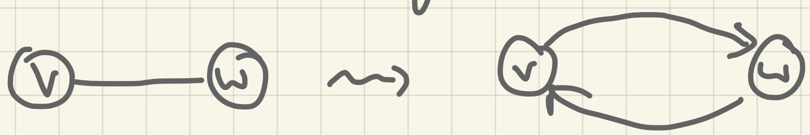
(E)

(Basen-Polytop des graphischen Matroids $\rightsquigarrow$ VL KombOpt)

[EDMONDS 1970]

Erweiterte Formulierung nach [MARTIN 89]

$\overleftrightarrow{G} = (V, \overleftrightarrow{E})$ sei die "bigerichtete" Variante von G:



Es gilt:

$$
SPT(G) = \left\{ x \in \mathbb{R}^E : \begin{array}{lll}
x_{\{v,w\}} = y^{(r)}_{(v,w)} + y^{(r)}_{(w,v)} & \forall \{v,w\} \in E & \forall r \in V \\
(\#)\ \boxed{\begin{array}{ll} y^{(r)}(\delta^{ein}(v)) = 1 & \forall v \in V \setminus \{r\} \\ y^{(r)}(\delta^{aus}(r)) = 0 & \end{array}} & & \begin{array}{l}\forall r \in V \\ \forall r \in V\end{array} \\
y^{(r)} \in \mathbb{R}_+^{\overleftrightarrow{E}} & \forall r \in V &
\end{array} \right\} =: M
$$

<u>Beweis:</u>

<u>"$\leq$":</u> Sei $T \subseteq E$ Spannbaum; für $r \in V$ sei $\overleftrightarrow{T}_r \subseteq \overleftrightarrow{E}$ die in Richtung r orientierte Variante von T ("r-Arboreszenz").
Dann erfüllen $x = \chi(T)$ und

$$y^{(r)} = \chi(\overleftrightarrow{T}_r) \qquad (r \in V)$$

das M beschreibende System.

<u>"$\geq$":</u> Wir zeigen, dass jede Bedingung aus (E) gültig für (h) ist.

<u>$x \geq 0$:</u> klar, weil $y^{(r)} \geq 0$

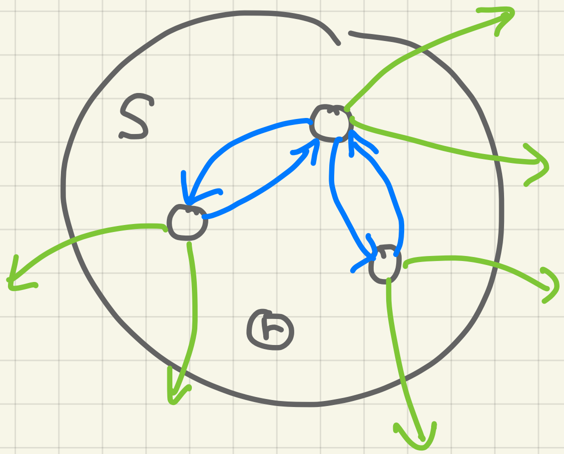
<u>$x(E) = |V|-1$:</u> Summation von (#) für ein beliebiges $r \in V$ liefert:

$$\overleftrightarrow{y}^{(r)}(\overleftrightarrow{E}) = |V|-1, \text{ also wegen } x(E) = y^{(r)}(\overleftrightarrow{E})$$

auch $x(E) = |V|-1$.

Sei schließlich $\emptyset \neq S \subsetneq V$;

wähle $r \in S$ beliebig.



Summation aller (#)-Gleichungen für alle $v \in S$ ergibt:

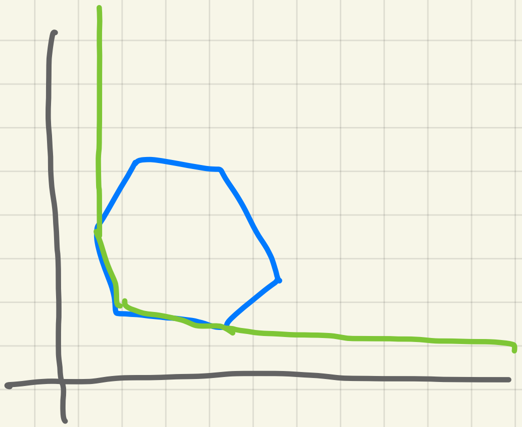
$$\underbrace{y^{(r)}\left(\overset{(\leftrightarrow)}{E}(S)\right)}_{= \; x(E(S))} + \underbrace{y^{(r)}\left(\delta^{out}(S)\right)}_{\geq \; 0} = |S|-1$$

$$\Rightarrow \quad x(E(S)) \leq |S|-1$$

Folgerung: $\quad xc(SPT(G)) \leq 2|V||E| \quad \left(= O(|V|^3) \right)$

Cut-Dominanten

$G=(V,E)$ Graph, $s_0 \in V$



$$\mathrm{CUT}^+(G) = \mathrm{conv}\{\chi(\delta(S)) : \emptyset \neq S \subsetneq V\} + \mathbb{R}_+^E$$

$$= \mathrm{conv} \bigcup_{t \in V\setminus\{s_0\}} \Big(\underbrace{\mathrm{conv}\{\chi(\delta(S)) : S \subseteq V,\ s_0 \in S,\ t \notin S\} + \mathbb{R}_+^E}_{\| (*)} \Big)$$

Erweiterungs-komplexität $\leq 4|E|$

$$\Big\{ x \in \mathbb{R}^E : x_{\{v,w\}} = z_{(v,w)} + z_{(w,v)} \quad \forall \{v,w\} \in E$$

$$z_v - z_w + z_{(v,w)} \geq \begin{cases} 0 & \text{, falls } v,w \neq s_0 \\ +1 & \text{, falls } v = s_0 \\ -1 & \text{, falls } w = s_0 \end{cases} \qquad \forall (v,w) \in \overleftrightarrow{E}$$

$$z_{s_0} = z_t = 0, \quad z_v \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

$$z_{(v,w)} \geq 0 \quad \forall (v,w) \in \overleftrightarrow{E} \Big\}$$

$$\mathrm{xc}(\mathrm{CUT}^+(G)) \leq O(|V| \cdot |E|)$$

$\overset{\Leftarrow}{}$ [Disjunktion]

Zu (*): Beide Polyeder haben $\mathbb{R}^E_{\geq 0}$ im charakteristischen Kegel.

Für $c \in \mathbb{R}^E_+$ und $\delta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle c, x\rangle \geq \delta \text{ für alle } x \in \operatorname{conv}\{\chi(\delta(S)) : S \subseteq V,\ s_0 \in S,\ t \notin S\} + \mathbb{R}^E_+$$

Max-Flow-Min-Cut

$\Leftrightarrow$ Es gibt einen s_0-t-Fluss y in $\overleftrightarrow{G}$ vom Wert $\geq \delta$ mit $0 \leq y \leq \overleftrightarrow{c}$

$$\Leftrightarrow \quad \delta \leq \max \left\{ y(\delta^{aus}(s_0)) - y(\delta^{ein}(s_0)) : \begin{array}{ll} y(\delta^{aus}(v)) = y(\delta^{ein}(v)) \quad \forall v \in V \setminus \{s_0, t\} & [z_v] \\ y_{(v,w)} \leq c_{\{v,w\}} \quad \forall (v,w) \in \overleftrightarrow{E} & [z_{(v,w)}] \\ y \in \mathbb{R}^{\overleftrightarrow{E}}_{\geq 0} & \end{array} \right\}$$

LP-Dualität

$$= \min \left\{ \sum_{\{v,w\} \in E} c_{\{v,w\}} \cdot (z_{(v,w)} + z_{(w,v)}) : \begin{array}{l} z_v - z_w + z_{(v,w)} \geq \begin{cases} 0 & \text{, falls } v,w \neq s_0 \\ +1 & \text{, falls } v = s_0 \\ -1 & \text{, falls } w = s_0 \end{cases} \quad \forall (v,w) \in \overleftrightarrow{E} \\ z_{s_0} = z_t = 0, \quad z_v \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V \\ z_{(v,w)} \geq 0 \quad \forall (v,w) \in \overleftrightarrow{E} \end{array} \right\}$$