GDO 23 27.1.20

Schlupf-Matrizen (Slack-Matrices) und nicht-negativer Rang

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$\emptyset \neq P = P^{\leq}(A,b) = \operatorname{conv}(V)$ (Für jede Ungl. in $Ax \leq b$ gibt es wenigstens ein $v \in V$, das sie mit Gleichheit erfüllt)

Schlupf-Matrix:

$S := b \cdot \mathbb{1}_V - A \cdot V \in \mathbb{R}^{m \times V}_{\geq 0}$ ($\leftarrow$ V wird als Matrix aufgefasst, deren Spalten die Elemente von V sind)

$\left(S_{i,v} = b_i - \langle A_{i,*}, v \rangle \right)$

(1) Sei $S = U \cdot W$ mit $U \in \mathbb{R}^{m \times q}_{\geq 0}$, $W \in \mathbb{R}^{q \times V}_{\geq 0}$

$\Rightarrow P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax + Uy = b, \ y \geq 0_q \}$

["$\supseteq$": $y \geq 0$, $Ax + Uy = b \underset{U \geq 0}{\Longrightarrow} Ax \leq b \Rightarrow x \in P$

"$\subseteq$": Für $v \in V$ ist $y := W_{*,v} \geq 0$ und $Av + Uy = Av + S_{*,v} = b$]

② $P = \{ x \in \mathbb{R}^n : Cx + Dy = f ,\ y \geq 0_q \}$ (jede erweiterte Formulierung der Größe q kann in so eine Form gebracht werden)

$Ax \leq b$ gültig für $P \underset{\text{[LP-Dualität]}}{\Longrightarrow}$

$$\exists R, T : \quad R \cdot (C, D, f) + T \cdot (0, -I_q, 0) = (A, 0, b), \quad T \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad RC = A, \quad \underbrace{RD - T = 0}, \quad Rf = b, \quad \underbrace{T \geq 0}$$

$$\Longrightarrow \quad U := RD \geq 0 \qquad (U \in \mathbb{R}_+^{m \times q})$$

Für jedes $v \in V$ sei $u(v) \geq 0$ mit $Cv + Du(v) = f$ [Ex., da $v \in P$]
Sei $W \in \mathbb{R}_+^{q \times V}$ die Matrix mit Spalten $(u(v))_{v \in V}$.

$$\Longrightarrow \quad UW = RDW = R \cdot (f \cdot 1_V - CV) = b \cdot 1_V - AV = S$$

Def.: Für $S \in \mathbb{R}^{m \times t}_{\geq 0}$ heißt

$$\operatorname{rang}_+(S) := \min \{ q : \exists\, U \in \mathbb{R}^{m \times q}_{\geq 0}, W \in \mathbb{R}^{q \times t}_{\geq 0} : S = UW \}$$

der <u>nicht-negative Rang</u> von S.

Erinnerung: $\operatorname{rang}(S) = \min \{ q : \exists\, U \in \mathbb{R}^{m \times q}, W \in \mathbb{R}^{q \times t} : S = UW \}$

Wir haben gezeigt: $xc(P) = \operatorname{rang}_+(S)$

Spaltenvektor

Zeilenvektor

$U \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $W \in \mathbb{R}^{q \times t}$: $\quad UW = \sum_{k=1}^{q} U_{*,k} \cdot W_{k,*}$

$$(UW)_{i,j} = \langle U_{i,*}, W_{*,j} \rangle = \sum_{k=1}^{q} U_{ik} W_{kj}$$

$$(\quad)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} U_{ik} \cdot W_{kj}$$

$\operatorname{rang}_+(S)$ = kleinste Anzahl nicht-negative Rang Eins Summanden

<u>Def.:</u> Für $M \in \mathbb{R}^{m \times t}_{\geq 0}$ sei

$$\operatorname{supp}(M) = \{ (i,j) : M_{ij} \neq 0 \}$$

d.h. >0, da $M \geq 0$

Ist $M = M^1 + \dots + M^r$ mit $M, M^1, \dots, M^r \geq 0$, so ist

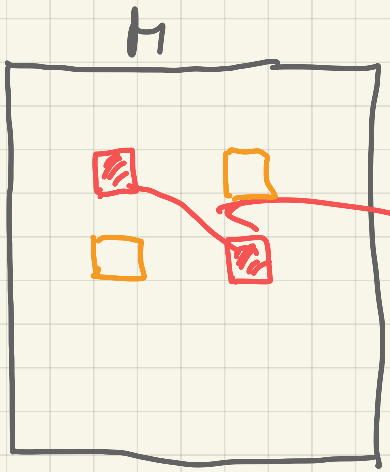
$$\operatorname{supp}(M) = \operatorname{supp}(M^1) \cup \dots \cup \operatorname{supp}(M^r)$$

Für $u \in \mathbb{R}^m_+$ und $w \in \mathbb{R}^t_+$ ist $\operatorname{supp}(uw^T) = \operatorname{supp}(u) \times \operatorname{supp}(w)$

Für $M \in \mathbb{R}^{m \times t}_+$, $I \subseteq [m]$, $J \subseteq [t]$ heißt (I,J) ein Rechteck von M, wenn $I \times J \subseteq \operatorname{supp}(M)$.

Def: Die <u>Rechtecküberdeckungszahl</u> $rc(M)$ von $M \in \mathbb{R}_+^{m \times t}$ ist die kleinste Anzahl Rechtecke von M, deren Vereinigung $\mathrm{supp}(M)$ ist.

Folgerung: $xc(P) \geq rc(S)$



> 0

Kante genau dann, wenn an wenigstens einer der Positionen und eine 0 steht.

$\rightsquigarrow$ Graph $G(M)$ auf Knotenmenge $\mathrm{supp}(M)$

Rechtecke sind stabile Mengen in $G(M)$

$rc(M)$ = Färbungszahl von $G(M)$.