Prof. Dr. Volker Kaibel

Otto-von-Guericke U MD
Wintersemester 2019/20

Geometrische Methoden der Diskreten Optimierung
1. Übungsblatt

Besprechung: Donnerstag, 24. Oktober

Aufgabe 1. Seien $B = [b^1, \dots, b^n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $G = [g^1, \dots, g^n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die zugehörige Gram-Schmidt Orthogonalisierung. Zeige:

1. Für alle Gittervektoren $x \in \Lambda(B) \setminus \{\mathbb{O}\}$ gilt:
$$\|x\|_2 \geq \min\{\|g^1\|_2, \dots, \|g^n\|_2\}$$
2. Ist B Lovász-reduziert, so ist
$$\|b^1\|_2 \leq 2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \min\{\|x\|_2 \,:\, x \in \Lambda(B) \setminus \{\mathbb{O}\}\}$$
(b^1 ist löst also bis auf einen Faktor $2^{(n-1)/2}$ das Kürzester-Gittervektor-Problem).

Aufgabe 2. Führe den Gitterbasis-Reduktionsalgorithmus (wird am Montag, 21.10. in der Vorlesung vorgestellt) für
$$B = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
durch.

Aufgabe 3. Seien $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompaktet, konvexe und zentralsymmetrische (d.h. $C = -C$) Menge mit Volumen mindestens $2^n \det(\Lambda)$. Zeige, dass
$$C \cap (\Lambda \setminus \{\mathbb{O}\}) \neq \varnothing$$
gilt (*Minkowskis 1. Theorem*).
Hinweis: Nimm an, dass $C \cap \Lambda = \{\mathbb{O}\}$ wäre. Überlege dann zunächst, dass die Mengen
$$x + \tfrac{1}{2}C \qquad (x \in \Lambda)$$
paarweise disjunkt sind und betrachtet danach das Volumen der Vereinigung ihrer Schnitte mit einem Fundamentalepiped von Λ.