

Geometrische Methoden der Diskreten Optimierung

2. Übungsblatt

Besprechung: Donnerstag, 14.11. November

Aufgabe 1. Für ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{O} \in \text{int}(P)$ sei

$$P^* := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \forall x \in P\}$$

das *Polare von P* . Zeigen Sie:

- P^* ist ein Polytop mit $\mathbb{O} \in \text{int}(P^*)$.
- $(P^*)^* = P$.

Aufgabe 2. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop mit $\mathbb{O} \in \text{int}(P)$. Für jede Seite $F \subseteq P$ sei

$$F^\diamond := \{y \in P^* : \langle x, y \rangle = 1 \forall x \in F\}.$$

Zeigen Sie:

- F^\diamond ist eine Seite von P^* .
- $F \subseteq G \Rightarrow G^\diamond \subseteq F^\diamond$
- $(F^\diamond)^\diamond = F$
- $\dim(F^\diamond) = d - 1 - \dim(F)$

Aufgabe 3. Sei P ein d -Polytop und $d \geq 3$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen paarweise äquivalent sind:

- P ist ein Simplex.
- P hat genau $d + 1$ Ecken.
- P hat genau $d + 1$ Facetten.
- P ist einfach und simplizial.