Prof. Dr. Volker Kaibel
Otto-von-Guericke U MD
Wintersemester 2019/20

Geometrische Methoden der Diskreten Optimierung

3. Übungsblatt

Besprechung: Donnerstag, 19. Dezember

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass ein dreidimensionales Polytop P mit n Facetten höchsten

$$2n-4$$

Ecken hat. Für welche Polytope wird diese Schranke angenommen?

Hinweis: Die Euler-Poincaré Formel und ein Double-Counting der Ecken-Kanten Inzidenzen könnten nützlich sein.

Aufgabe 2. Seien $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein dreidimensionales einfaches Polytop mit N Ecken und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional in allgemeiner Lage (d.h. keine zwei Ecken von P haben den gleichen φ-Wert). Zeigen Sie, dass die Random-Edge Pivot-Regel (die vorschreibt, in jeder nicht optimalen Ecke gleichverteilt zufällig zu einem verbessernden Nachbarn fortzuschreiten) für jede Startecke im Erwartungswert nach höchstens $\frac{5}{6}N \leq 0.84N$ Schritten (und wegen Aufgabe 1 damit nach höchstens $\frac{5}{3}n \leq 1.67n$ Schritten, wenn n die Anzahl der Facetten von P ist) die φ-maximale Ecke erreicht.

Hinweis: Wir nennen die Ecken, welche genau eine Nachbarecke mit größerem φ-Wert haben, *1-Ecken*. Für jede Ecke v seien $N^+(v)$ bzw. $N_1^+(v)$ die Anzahlen von Ecken bzw. von 1-Ecken mit nicht kleinerem φ-Wert als $\varphi(v)$. Für eine Ecke v sei ferner $f(v)$ die erwartete Anzahl an Schritten, die Random-Edge bei Start in v durchführt. Wir definieren

$$f(N^+, N_1^+) := \max\{f(v) \,:\, v \text{ Ecke von } P, N^+(v) \leq N^+, N_1^+(v) \leq N_1^+\}\,.$$

Zeige die Ungleichung $f(N^+, N_1^+) \leq \frac{2}{3}N^+ + \frac{1}{3}N_1^+$.