$\boxed{A3}$ Angenommen, $C \cap \Lambda = \{0\}$.

Seien $x^1, x^2 \in \Lambda$ mit

$$\left(x^1 + \tfrac{1}{2}C\right) \cap \left(x^2 + \tfrac{1}{2}C\right) \neq \emptyset .$$

Dann gibt es $c^1, c^2 \in C$ mit

$$x^1 + \tfrac{1}{2}c^1 = x^2 + \tfrac{1}{2}c^2$$

$$\Longrightarrow \quad x^1 - x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{2}c^1$$

$$= \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{2}\underbrace{\left(-c^1\right)}_{\in C \text{ [zentralsymm.]}} \in C \quad \text{[konvex]}$$

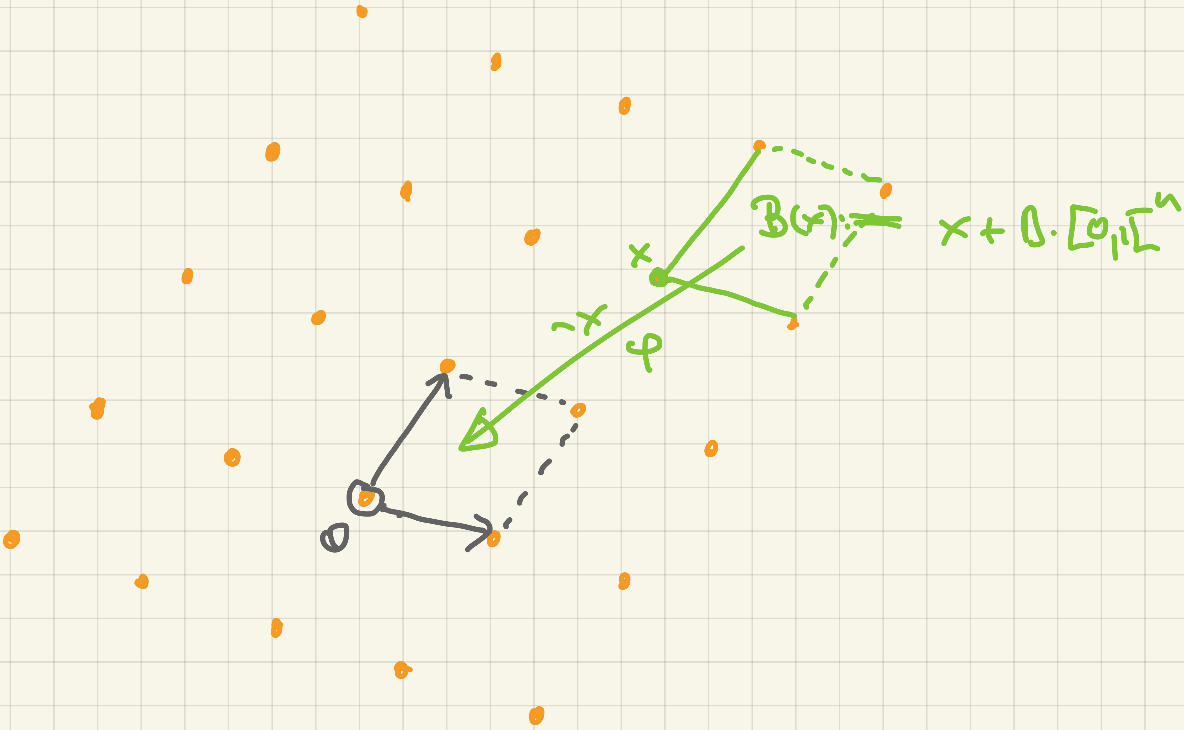
$$\Longrightarrow \quad x^1 = x^2 .$$

Sei $\mathcal{B} = [b^1, \dots, b^n]$ eine Gitterbasis von Λ.

Für $x \in \Lambda$: $\quad \mathcal{B}(x) := \mathcal{B} \cdot [0,1[^n$.

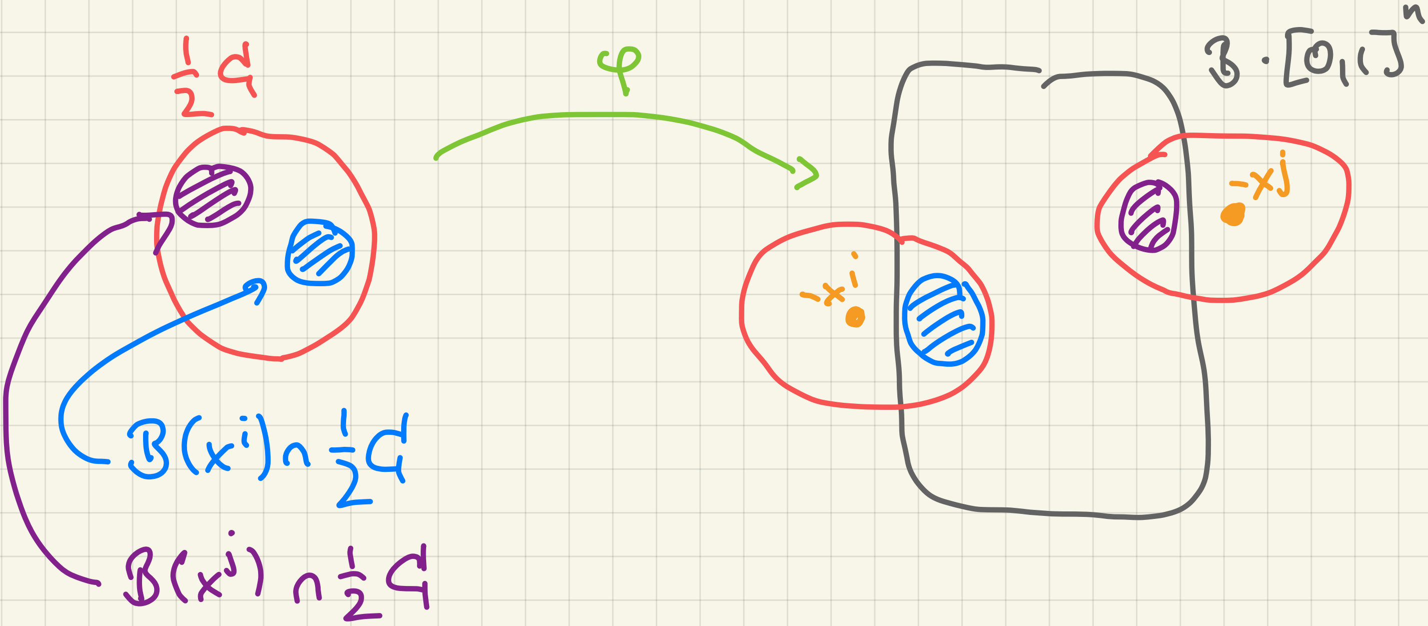
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{B} \cdot [0,1[^n$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b^j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \left(\lambda_j - \lfloor \lambda_j \rfloor\right) b^j$$



Da $\frac{1}{2}G$ beschränkt ist, gibt es nur endlich viele $x^1, \dots, x^k \in \Lambda$ mit

$$B(x^i) \cap \frac{1}{2}G \neq \emptyset.$$



Es gilt:

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\left(-x^i+\tfrac{1}{2}C\right)\cap B\cdot[0,1]^n\right) \geq \mathrm{vol}_n\left(\tfrac{1}{2}C\right)$$

$$\Bigg[\ \mathrm{vol}_n\left(\tfrac{1}{2}C\right) = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\mathrm{vol}\left(B(x^i)\cap\tfrac{1}{2}C\right)}_{=\ [\varphi \text{ lin. Translation um } -x^i]\ \mathrm{vol}\left(\underbrace{\varphi\left(B(x^i)\cap\frac{1}{2}C\right)}_{\subseteq\left(-x^i+\frac{1}{2}C\right)\cap B\cdot[0,1]^n}\right)}$$

$$\leq \mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}\underbrace{\left(-x^i+\tfrac{1}{2}C\right)\cap B\cdot[0,1]^n}_{=:\,M_i}\right)\ \Bigg]$$

$\left(-x^i+\frac{1}{2}C\right)\cap\left(-x^j+\frac{1}{2}C\right)=\emptyset$ für $i\neq j$

Wegen $\mathrm{vol}(C)\geq 2^n\det(\Lambda)$ ist $\mathrm{vol}\left(\frac{1}{2}C\right)\geq\det(\Lambda)$,

also

$$\mathrm{vol}\left(\bigcup_{i=1}^{k}M_i\right)\geq\mathrm{vol}\left(B\cdot[0,1]^n\right)$$

mit kompakten, paarweise disjunkten Mengen

$$M_i\subseteq B\cdot[0,1]^n.$$

Das impliziert $k=1$, also

$$b^1,\dots,b^n\in -x^1+\tfrac{1}{2}C \quad \lightning \quad \left(b^j+\tfrac{1}{2}C\right)\cap\left(-x^1+\tfrac{1}{2}C\right)=\emptyset$$
für $b^j\neq -x^1$

Anwendung:

$$K_r(0) := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq r \}$$

kompakt, konvex, zentralsymmetrisch.

$$\operatorname{vol}(K_r(0)) = \frac{r^n \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \qquad n \nearrow$$

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \, dx \qquad (\text{"Gamma-Funktion"})$$

(für $n = 1, 2, \ldots$: $\Gamma(n) = (n-1)!$)

Also $\operatorname{vol}(K_r(0)) \geq \frac{r^n \cdot \pi^{n/2}}{\lceil \frac{n}{2} \rceil !}$.

Es gilt also $K_r(0) \cap \Lambda \neq \{0\}$, wenn

$$\frac{r^n \pi^{n/2}}{\lceil \frac{n}{2} \rceil !} \geq 2^n \cdot \det(\Lambda) \quad \text{ist.}$$

$$\Updownarrow$$

$$r \geq \frac{2 \cdot \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil ! \right)^{1/n}}{\sqrt{\pi}} \det(\Lambda)^{1/n}$$

$$\approx \sqrt{\frac{2n}{e\pi}}$$

Es gibt also einen Gittervektor ($\neq 0$) der Länge $\leq \sqrt{\frac{2n}{e\pi}} \det \Lambda^{1/n}$.