IP 29.4.19

2. Ganzzahlige Hüllen von Polyedern

Definition:

- Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$: $P^{\le}(A,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\}$ ("Polyeder")
- Für $Z \subseteq \mathbb{Q}^n$ $(|Z| < \infty)$: $\kappa(Z) := \max\{\langle z \rangle : z \in Z\}$
- Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$: $\kappa(A) := \max\{\langle A_{i,*} \rangle : i \in [m]\}$
- $K \subseteq \mathbb{R}^n$ "Kegel" $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{O} \in K$, $\mathbb{R}_+ \cdot K \subseteq K$
- $K \subseteq \mathbb{R}^n$ "polyedrischer Kegel" $:\Leftrightarrow$ K ist Kegel und Polyeder
  $\Leftrightarrow$ $K = P^{\le}(A, \mathbb{O})$

Darstellung von Polyedern

- Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ existieren $X, Y \subseteq \mathbb{Q}^n$ mit $|X|, |Y| < \infty$ und

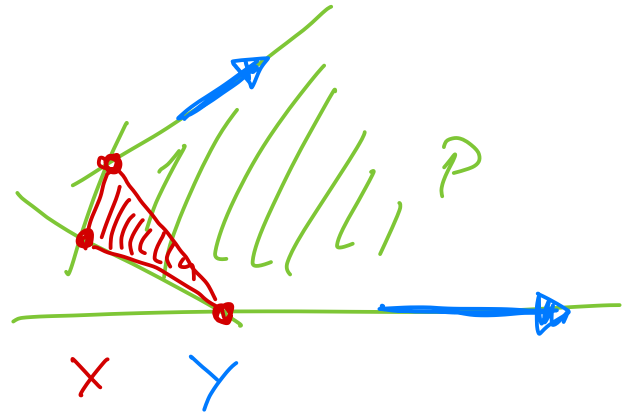
$$P^{\leq}(A,b) = \operatorname{conv}(X) + \operatorname{ccone}(Y)$$

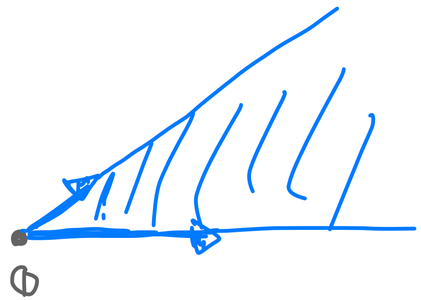
("innere Darstellung")

Insbesondere für polyedrische Kegel:

$$P^{\leq}(A,0) = \operatorname{ccone}(Y)$$

$\rightarrow$ $k(X \cup Y)$ polynomial beschränkt in $k(A,b)$





- Für $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $|X|, |Y| < \infty$ existieren $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ mit:
  - $\operatorname{conv}(X) + \operatorname{ccone}(Y) = P^{\leq}(A, b)$ ("äußere Darstellung")

    (insbesondere: endlich erzeugte Kegel sind polyedrisch: $\operatorname{ccone}(Y) = P^{\leq}(A, 0)$)

- rationale Daten $(A, b, X, Y) \rightsquigarrow$ "rationales Polyeder"

- Für $P^{\leq}(A, b) = P = \operatorname{conv}(X) + \operatorname{ccone}(Y) \neq \emptyset$:

$$\operatorname{rec}(P) = \operatorname{char}(P) = \{ y \in \mathbb{R}^n : x + \mathbb{R}_+ \cdot y \subseteq P \ \forall x \in P \} = \operatorname{ccone}(Y) = P^{\leq}(A, 0)$$

"charakteristischer Kegel" / "Rezessionskegel" von P.

- "Polytop": beschränktes Polyeder P $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{char}(P) = \{0\}$

  für $P \neq \emptyset$

Definition: Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $|Y| < \infty$.

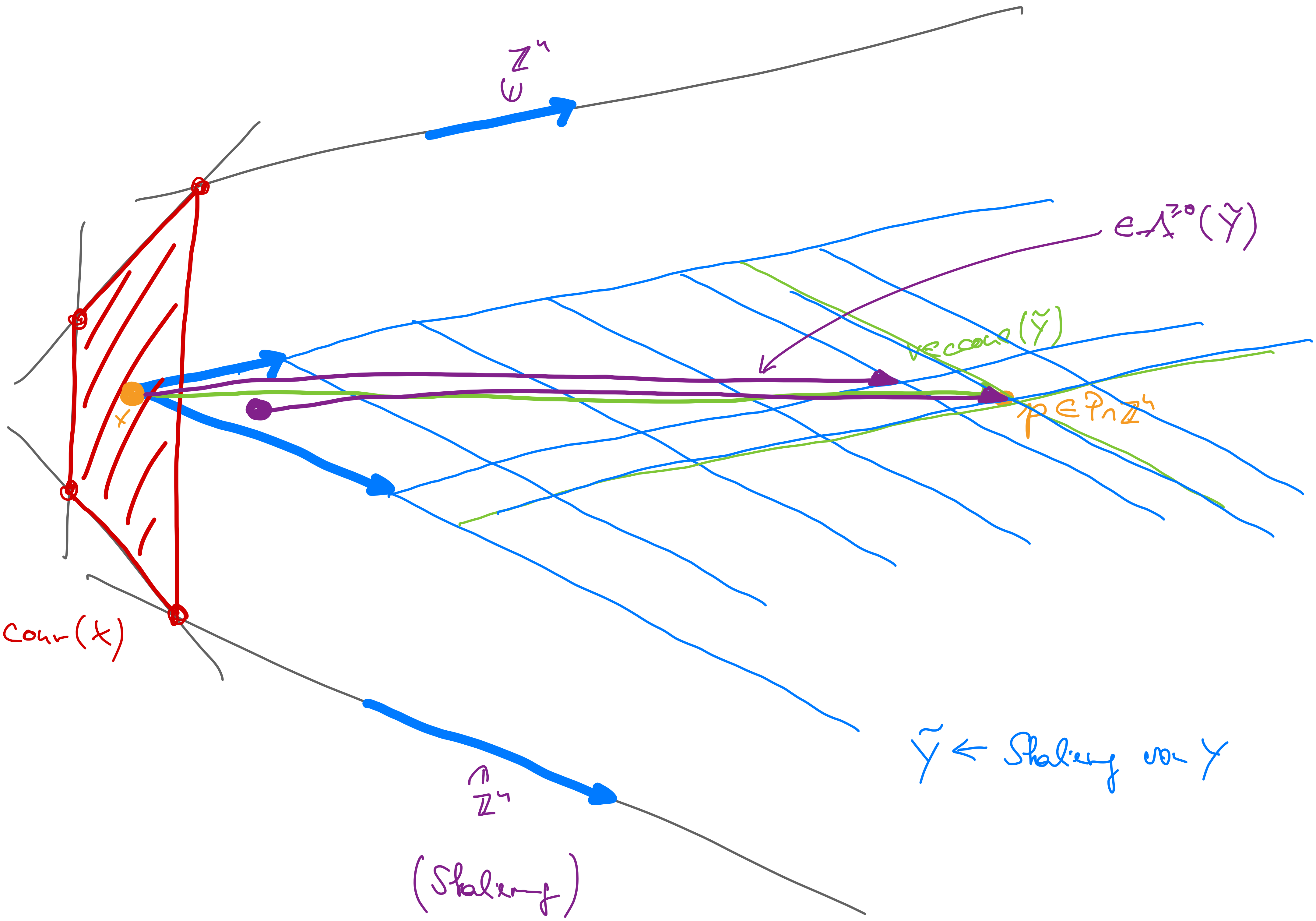
$\{0,1,2,\dots\}$

$$\Lambda^{\geq 0}(Y) := \left\{ \sum_{y \in Y} \lambda_y \cdot y \;:\; \lambda_y \in \mathbb{N} \;\; \forall y \in Y \right\}$$

ist das von Y erzeugte additive (Unter-)Monoid von $\mathbb{R}^n$.

Satz 2.1: Seien $X, Y \subseteq \mathbb{Q}^n$, $|X|, |Y| < \infty$ und $P = \mathrm{conv}(X) + \mathrm{ccone}(Y)$.
Es gibt $\tilde{X}, \tilde{Y} \subseteq \mathbb{Z}^n$, $|\tilde{X}|, |\tilde{Y}| < \infty$ mit:

- $P \cap \mathbb{Z}^n = \tilde{X} + \Lambda^{\geq 0}(\tilde{Y})$
- $\mathrm{ccone}(\tilde{Y}) = \mathrm{ccone}(Y) = \mathrm{char}(P)$
- $K(\tilde{X} \cup \tilde{Y})$ ist polynomial beschränkt in $k(X \cup Y)$.



$\mathbb{Z}^n$
$\cup$
$\in \Lambda^{\geq 0}(\tilde{Y})$
$v \in \mathrm{conv}(\tilde{Y})$
x
$p \in P \cap \mathbb{Z}^n$
$\mathrm{conv}(x)$
$\tilde{Y} \leftarrow$ Skalierung von Y
$\hat{\mathbb{Z}}^n$
(Skalierung)