IP 6.5.19

Beweis zu Kor. 2.4: ($K = P^{\leq}(A, 0)$ polyedrischer Kegel, $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$)

(i) Kor. 2.2 $\Rightarrow \exists \tilde{X}, \tilde{Y} \subseteq \mathbb{Z}^n$, $|\tilde{X}|, |\tilde{Y}| < \infty$:

$$K \cap \mathbb{Z}^n = \tilde{X} + \Lambda^{\geq 0}(\tilde{Y}) \underset{K \text{ Kegel}}{=} \Lambda^{\geq}(\underbrace{\tilde{X} \cup \tilde{Y}}_{\text{Hilbert-Basis}})$$

(ii) K spitz: $H := \{ z \in K \cap \mathbb{Z}^n : \nexists x, y \in (K \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0\} : z = x + y \}$

H ist offenbar Teilmenge jeder Hilbert-Basis von K.
Es genügt, zu zeigen, dass H eine Hilbert-Basis von K ist.
Angenommen, $K \cap \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda^{\geq 0}(H) \neq \emptyset$. (*)
Da K spitz ist, gibt es $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

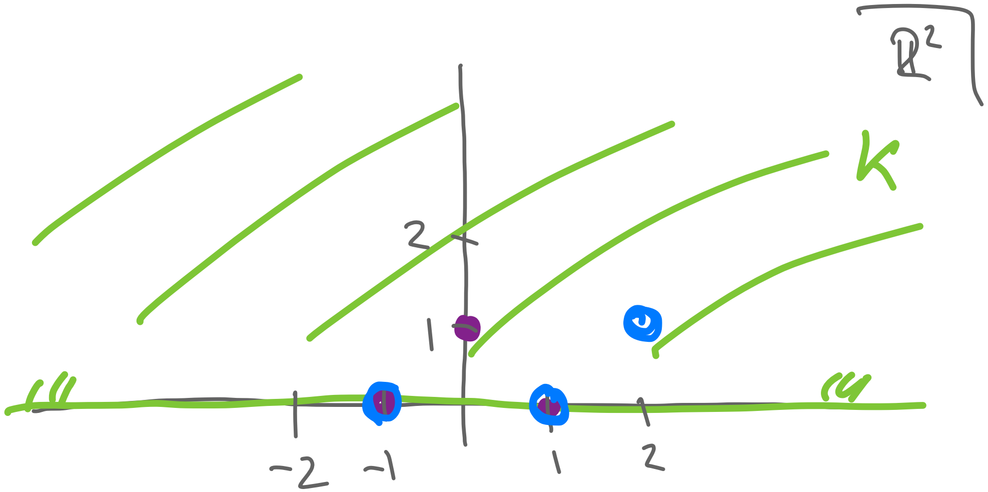
$$\langle c, x \rangle \leq 0 \quad \forall x \in K \quad \text{und} \quad x \in K, \langle c, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Wegen (*) ex. $z \in K \cap \mathbb{Z}^n \setminus \Lambda^{\geq 0}(H)$; wähle z so, dass $\langle c, z \rangle$ maximal ist. Wegen $z \notin H$ gibt es $x, y \in (K \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}$ mit

$z = x + y$. Also $\langle c, z\rangle = \underbrace{\langle c, x\rangle}_{<0} + \underbrace{\langle c, y\rangle}_{<0}$

$\Rightarrow \langle c, x\rangle, \langle c, y\rangle > \langle c, z\rangle$ ↯ zu Max. von $\langle c, z\rangle$ ∎

<u>Spitzheit ist nötig für Eindeutigkeit:</u>



Definition: Für $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ($|S| = \infty$ möglich) heißt

$$\operatorname{conv}(S) := \bigcap \{ C : S \subseteq C, \; C \text{ konvex} \}$$

die "konvexe Hülle" von S.

mit je zwei Punkten ist auch deren Verbindungsstrecke enthalten

Bemerkungen:
- $\operatorname{conv}(S)$ ist konvex
- $$\operatorname{conv}(S) = \bigcup \{ \operatorname{conv}(S') : S' \subseteq S, |S'| < \infty \}$$
  $$= \Big\{ \sum_{s \in S'} \lambda_s \cdot s : S' \subseteq S, |S'| < \infty, \lambda_s \geq 0 \; \forall s \in S', \sum_{s \in S'} \lambda_s = 1 \Big\}$$
- $\inf \{ \langle c, x \rangle : x \in S \} = \inf \{ \langle c, x \rangle : x \in \operatorname{conv}(S) \}$
  und entweder werden beide oder keins der beiden Infima angenommen.

$\inf \{ \min \{ \langle c, x \rangle : x \in S' \} : S' \subseteq S, |S'| < \infty \}$

blaue und rote Zahlenmengen sind identisch und Endl.

$\inf \{ \min \{ \langle c, x \rangle : x \in \operatorname{conv}(S') \} : S' \subseteq S, |S'| < \infty \}$

Definition: Für ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

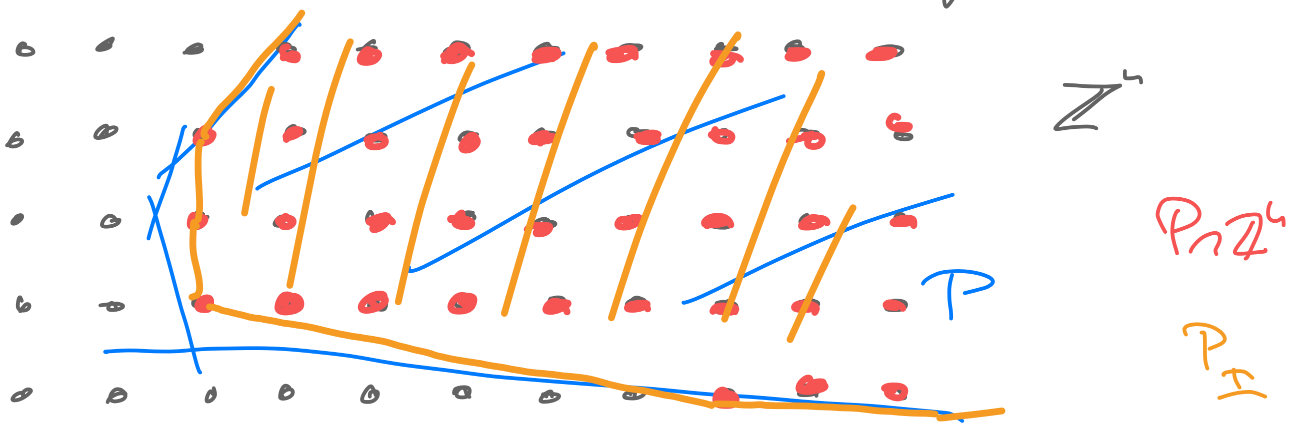
$$P_I := \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$$

die "<u>ganzzahlige Hülle</u>" von P.

Satz 2.6: Zu $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P = P^{\leq}(A,b)$ gibt es $D \in \mathbb{Q}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{Q}^p$ mit:

- $P_I = P^{\leq}(D,d)$
- $\kappa(D,d)$ polynomial beschränkt in $\kappa(A,b)$.

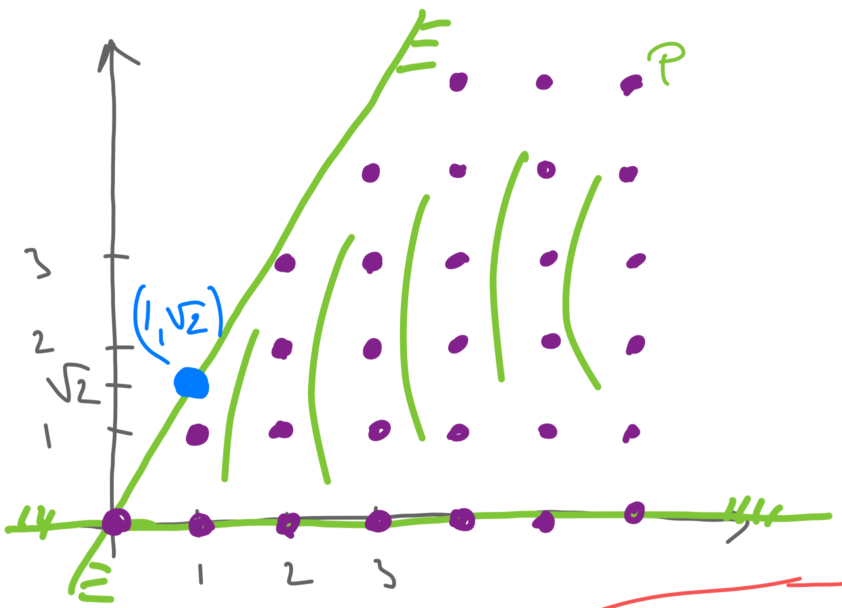
Falls $P_I \neq \emptyset$, so gilt $\dim(P_I) = \dim(P)$.

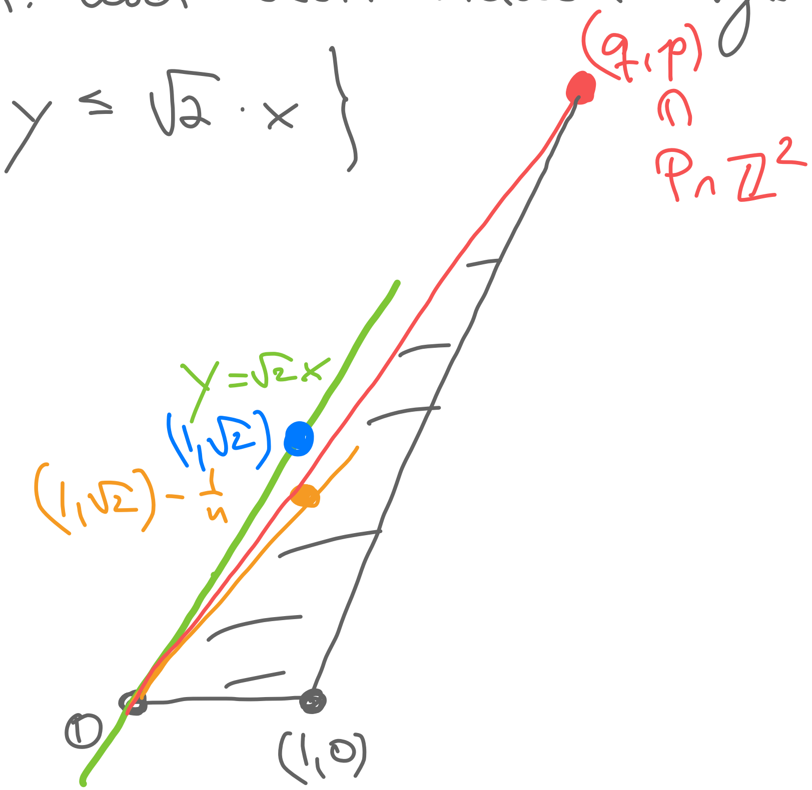


Bemerkung: Für (A,b) nicht rational ist $P^{\le}(A,b)_I$ i.A. kein Polyeder (i.A. noch nicht einmal abgeschlossen).

Bsp.: $P = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{2}\cdot x\}$

$P_I = P \setminus \mathbb{R}_{>0}\cdot(1,\sqrt{2})$





Wähle $p,q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $\sqrt{2}-\frac{1}{n} \le \frac{p}{q} \le \sqrt{2}$

$(1,\sqrt{2}) \notin P_I$ [Wäre $(1,\sqrt{2}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\cdot(x_i,y_i)$, $\lambda_i \ge 0$, $\sum\lambda_i = 1$, $(x_i,y_i)\in P\cap\mathbb{Z}^2$, so wegen $y_i \le \sqrt{2}\cdot x_i$ und $\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot 1$ also $y_i = \sqrt{2}\cdot x_i$ $\forall i$ ↯ $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$]

$(1,\sqrt{2}-\frac{1}{n}) \in P_I$ $\forall n \ge 1$

Bemerkung: Ist $P \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebiges Polytop (d.h. beschränktes Polyeder), so ist $|P \cap \mathbb{Z}^n| < \infty$, also P_I ein Polytop.

Lemma 2.5: Für $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $|S|, |T| < \infty$ gilt:

$$\operatorname{conv}\left(S + \Lambda^{\geq 0}(T)\right) = \operatorname{conv}(S) + \operatorname{ccone}(T)$$