$\boxed{\text{IP } 7.5.19}$

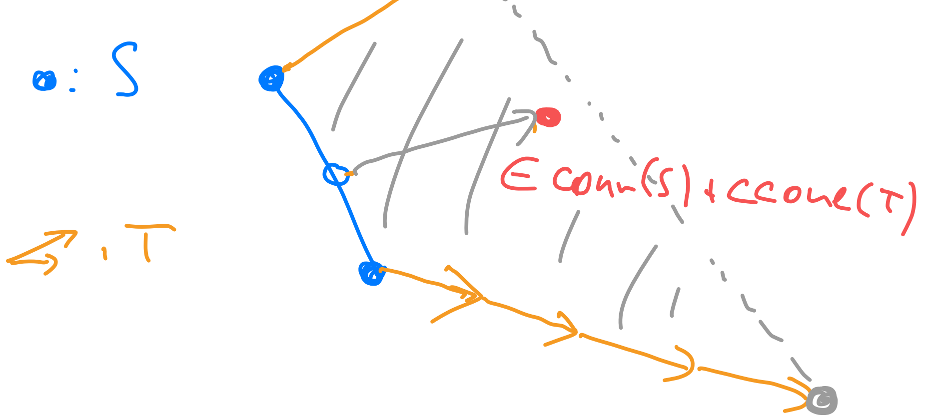
Lemma 2.5: Für $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, $|S|, |T| < \infty$ gilt:

$$\operatorname{conv}\left(S + \Lambda^{\geq 0}(T)\right) = \operatorname{conv}(S) + \operatorname{ccone}(T)$$

Bew.: "$\subseteq$": Für $\lambda_s \geq 0$ $(s \in S)$, $\sum \lambda_s = 1$, $\mu_{s,t} \geq 0$ $(s \in S, t \in T)$ gilt:

$$\sum_{s \in S} \lambda_s \cdot \left(s + \sum_{t \in T} \mu_{s,t} \cdot t\right) = \underbrace{\sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s}_{\in \operatorname{conv}(S)} + \underbrace{\sum_{s \in S} \lambda_s \sum_{t \in T} \mu_{st} \cdot t}_{\in \operatorname{ccone}(T)}$$

"$\supseteq$":



Seien $\lambda_s \geq 0$ $(s \in S)$, $\sum \lambda_s = 1$, $\mu_t \geq 0$ $(t \in T)$

Zu zeigen:

$$\sum_{s \in S} \lambda_s \cdot s + \sum_{t \in T} \mu_t \cdot t \in \operatorname{conv}\left(S + \Lambda^{\geq 0}(T)\right)$$

Setze $M := 1 + \sum_{t\in T} \lceil \mu_t \rceil \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\quad \tilde{t} := M\cdot t \quad (t\in T)$

$\tilde{\mu}_t := \frac{\mu_t}{M} \geq 0 \quad (t\in T)$, $\quad \tilde{\mu}_0 := 1 - \sum_{t\in T} \tilde{\mu}_t \geq 0$ (können annehmen: $0 \notin T$)

$T_0 := T \cup \{0\}$

$$\sum_{s\in S} \lambda_s \cdot s + \sum_{t\in T} \mu_t \cdot t = \sum_{s\in S} \lambda_s \cdot s + \sum_{t\in T_0} \tilde{\mu}_{\tilde{t}} \cdot \tilde{t}$$

$\sum_{s\in S} \lambda_s = 1$, $\sum_{\tilde{t}\in T_0} \tilde{\mu}_{\tilde{t}} = 1 \longrightarrow$

$$= \sum_{s\in S} \sum_{t\in T_0} \lambda_s \cdot \tilde{\mu}_{\tilde{t}} (\underbrace{s + \tilde{t}}_{\in S + \Lambda^{\geq 0}(T)})$$

$$\sum_{s\in S} \sum_{t\in T_0} \lambda_s \tilde{\mu}_{\tilde{t}} = \Big(\underbrace{\sum_{s\in S} \lambda_s}_{1}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\sum_{t\in T_0} \tilde{\mu}_{\tilde{t}}}_{1}\Big) \longrightarrow$$

$$\in \operatorname{conv}(S + \Lambda^{\geq 0}(T))$$

∎

Beweis zu Satz 2.6

- Kor. 2.2 $\Rightarrow$ $P \cap \mathbb{Z}^n = \tilde{X} + \Lambda^{\geq 0}(\tilde{Y})$ mit $\tilde{X}, \tilde{Y} \subseteq \mathbb{Z}^n$, $|\tilde{X}|, |\tilde{Y}| < \infty$
  und $k(\tilde{X} \cup \tilde{Y})$ polynomial beschränkt in $k(A,b)$,
  $\operatorname{ccone}(\tilde{Y}) = \operatorname{char}(P)$

- Lem. 2.5 $\Rightarrow$ $P_I = \operatorname{conv}(\tilde{X}) + \operatorname{ccone}(\tilde{Y})$

- EMO: $\exists\, D \in \mathbb{Q}^{p \times n}, d \in \mathbb{Q}^p$:

  - $\underbrace{\operatorname{conv}(\tilde{X}) + \operatorname{ccone}(\tilde{Y})}_{P_I} = P^{\leq}(D,d)$

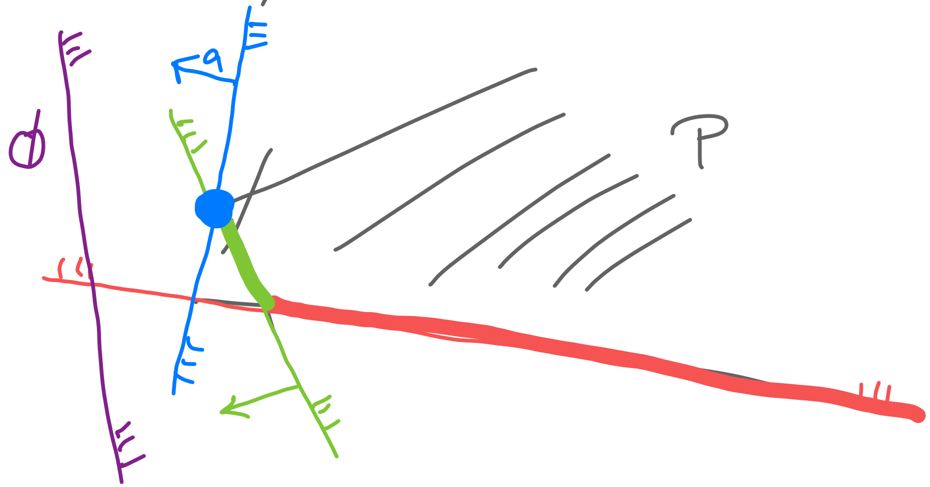
  - Falls $P_I \neq \emptyset$: $\operatorname{char}(P_I) = \operatorname{ccone}(\tilde{Y}) = \operatorname{char}(P)$

  - $k(D,d)$ ist polynomial beschränkt in $k(\tilde{X} \cup \tilde{Y})$,
    also in $k(A,b)$. $\blacksquare$

Exkurs: Seiten von Polyedern

Definition: Eine Teilmenge $F \subseteq P \subseteq \mathbb{R}^n$ eines Polyeders P ist eine Seite (face) von P, falls $F = \emptyset$ oder $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ existieren mit:

- $\langle a, x \rangle \leq \beta \quad \forall x \in P$
- $F = \{x \in P : \langle a, x \rangle = \beta\}$



<u>Bemerkungen</u>: Sei $P = P^{\leq}(A,b) = \operatorname{conv}(X) + \operatorname{ccone}(Y)$ mit

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$, $|X|, |Y| < \infty$; sei F eine Seite von P.

- F ist ein Polyeder; Seiten von F sind Seiten von P
- $F = \operatorname{conv}(X \cap F) + \operatorname{ccone}(Y \cap \operatorname{char}(F))$
- Mit $\operatorname{Eq}(F) := \{ i \in [m] : \langle A_{i,*}, x \rangle = b_i \ \forall x \in F \}$ ("equation set") ist $F = \{ x \in P : A_{\operatorname{Eq}(F),*} \cdot x = b_{\operatorname{Eq}(F)} \}$ (falls $F \neq \emptyset$)
- Für alle $I \subseteq [m]$: $\{ x \in P : A_{I,*} \cdot x = b_I \}$ ist eine Seite von P
- P hat nur endlich viele Seiten.
- F "<u>minimale Seite</u>" von P, wenn F inklusionsminimal unter den nicht-leeren Seiten von P ist (jede nicht-leere Seite enthält eine minimale Seite).

- $\operatorname{lineal}(P) := \{ z \in \mathbb{R}^n : x + \lambda z \in P \ \forall x \in P \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \} = \ker(A)$

$$\begin{array}{l} \operatorname{lineal}(P) \\ \cap \\ \operatorname{char}(P) \\ \| \\ P^{\leq}(A, 0) \end{array}$$

- F minimale Seite von P:
  - $\forall x^{(0)} \in F: \quad F = x^{(0)} + \operatorname{lineal}(P)$
  - $F = \{ x \in \mathbb{R}^n : A_{Eq(F),*} \cdot x = b_{Eq(F)} \}$