IP 20.5.19

- P "spitz" ("pointed"), wenn $P \neq \emptyset$ und $\text{lineal}(P) = \{0\}$

  ↳ Minimale Seiten sind einpunktig : "Ecken"

  (Bsp.: Polytope = beschränkte Polyeder sind spitz, wenn nicht leer)

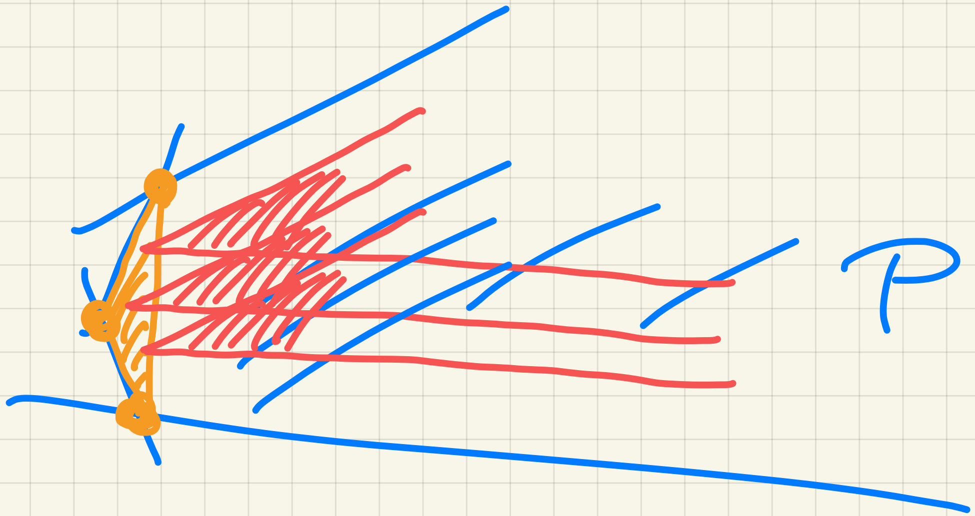
- $v \in P$ ist Ecke von P $\iff$ $\{v\}$ ist 0-dim. Seite von P

  $\iff$ $v \notin \text{conv}(P \setminus \{v\})$

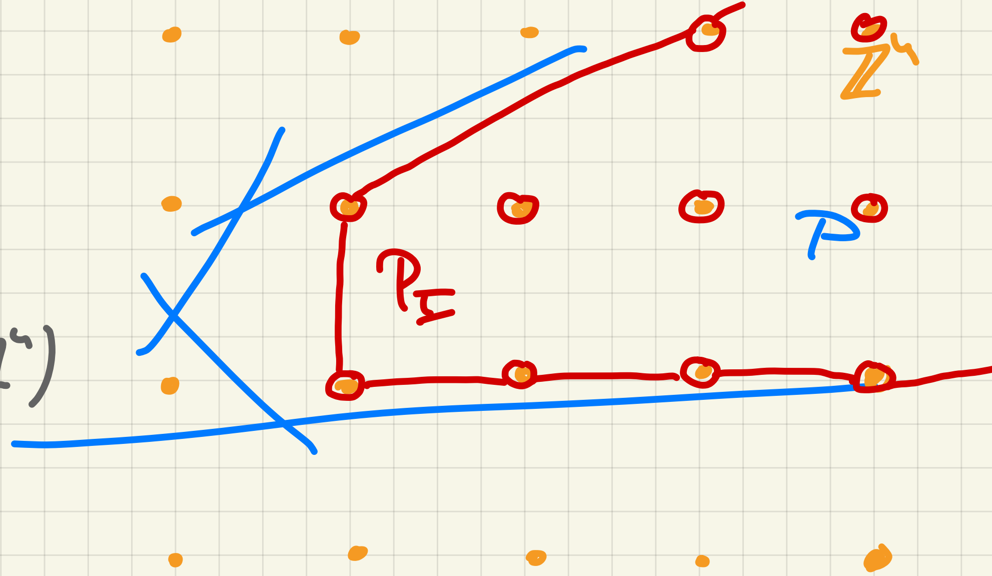
  $\iff$ v ist nicht Konvexkombination von zwei anderen Punkten in P

Satz 2.7: Seien $P \subseteq \mathbb{R}^n$ Polyeder und $X \subseteq P$. Dann gilt

$$P = \operatorname{conv}(X) + \operatorname{char}(P)$$ genau dann, wenn X aus jeder minimalen Seite von P mindestens einen Punkt enthält (insbesondere falls P spitz: genau dann, wenn X alle Ecken von P enthält).



Satz 2.8: Ist $P \subseteq \mathbb{R}^n$ rationales Polyeder, so enthält jede nicht-leere Seite von $P_I = \mathrm{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$ wenigstens einen ganzzahligen Punkt.



Beweis: Da P rationales Polyeder ist, ist P_I rationales Polyeder (nach Satz 2.6). Ist $F \neq \emptyset$ Seite von P_I, so gibt es also $a \in \mathbb{Q}^n$, $\delta \in \mathbb{Q}^n$ mit

$$\delta = \max\{\langle a,x\rangle : x \in P_I\} = \max\{\langle a,x\rangle : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

Also gibt es $z \in P \cap \mathbb{Z}^n$ mit $\langle a,z\rangle = \delta$, folglich $z \in F \cap \mathbb{Z}^n$. ∎

Naives Verfahren für ganzzahlige Optimierung

$$\mathrm{OPT} = \max \{ \langle c, x \rangle : Ax \le b, \; x \in \mathbb{Z}^n \} \qquad (A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m, c \in \mathbb{Q}^n)$$

① Bestimme $D \in \mathbb{Q}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{Q}^p$ mit

$$P_I = P^{\le}(D, d) \qquad (P := P^{\le}(A, b))$$

[Satz 2.6]

② Finde $\max \{ \langle c, x \rangle : Dx \le d \}$ $(= \mathrm{OPT})$ [LP]

③ Finde eine inklusionsmaximale Menge $I \subseteq [p]$ mit

$$F := \{ x \in \mathbb{R}^n : Dx \le d, \; D_{I,*} x = d_I, \; \langle c, x \rangle = \mathrm{OPT} \} \ne \emptyset$$

[p Zulässigkeits-LP's]

F ist minimale Seite von P_I, also

$$F = \{ x \in \mathbb{R}^n : D_{I,*} x = d_I, \; \langle c, x \rangle = \mathrm{OPT} \}$$

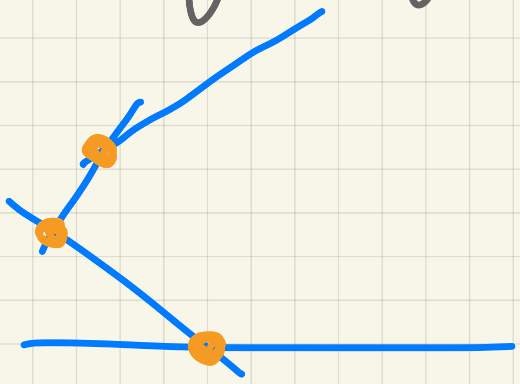
④ Das Finden einer optimalen ganzzahligen Lösung ist also reduziert auf die Lösung des linearen Diophantischen Gleichungssystems

$$D_{I,*}\, x = d_I \;, \quad \langle c, x \rangle = OPT \qquad [\text{Key } 1]$$

<u>Bemerkung:</u> Im <u>Allgemeinen</u> ist dieses Verfahren sowohl praktisch als auch theoretisch nicht durchführbar (wegen Schritt ①), aber in manchen Fällen …

<u>Definition:</u> Ein Polyeder P heißt <u>"ganzzahlig"</u>, wenn $P_I = P$ gilt.

Satz 2.9: Ein <u>rationales</u> Polyeder P ist genau dann ganzzahlig, wenn jede minimale Seite von P wenigstens einen ganzzahligen Punkt enthält.



Beweis: "$\Rightarrow$": Satz 2.8

"$\Leftarrow$": Wähle $X \subseteq P \cap \mathbb{Z}^n$ so, dass X aus jeder minimalen Seite von P einen ganzzahligen Punkt enthält.

$$\overset{\text{Satz 2.7}}{\Longrightarrow} \quad P = \underbrace{\mathrm{conv}(X)}_{\subseteq P_I} + \underbrace{\mathrm{char}(P)}_{= \mathrm{char}(P_I)}$$

falls $P_I \neq \emptyset$

$P_I = \emptyset \Rightarrow P = \emptyset$, da jede minimale Seite von P einen ganzzahligen Punkt enthält

$$\subseteq P_I$$

$$\Longrightarrow P = P_I$$

∎