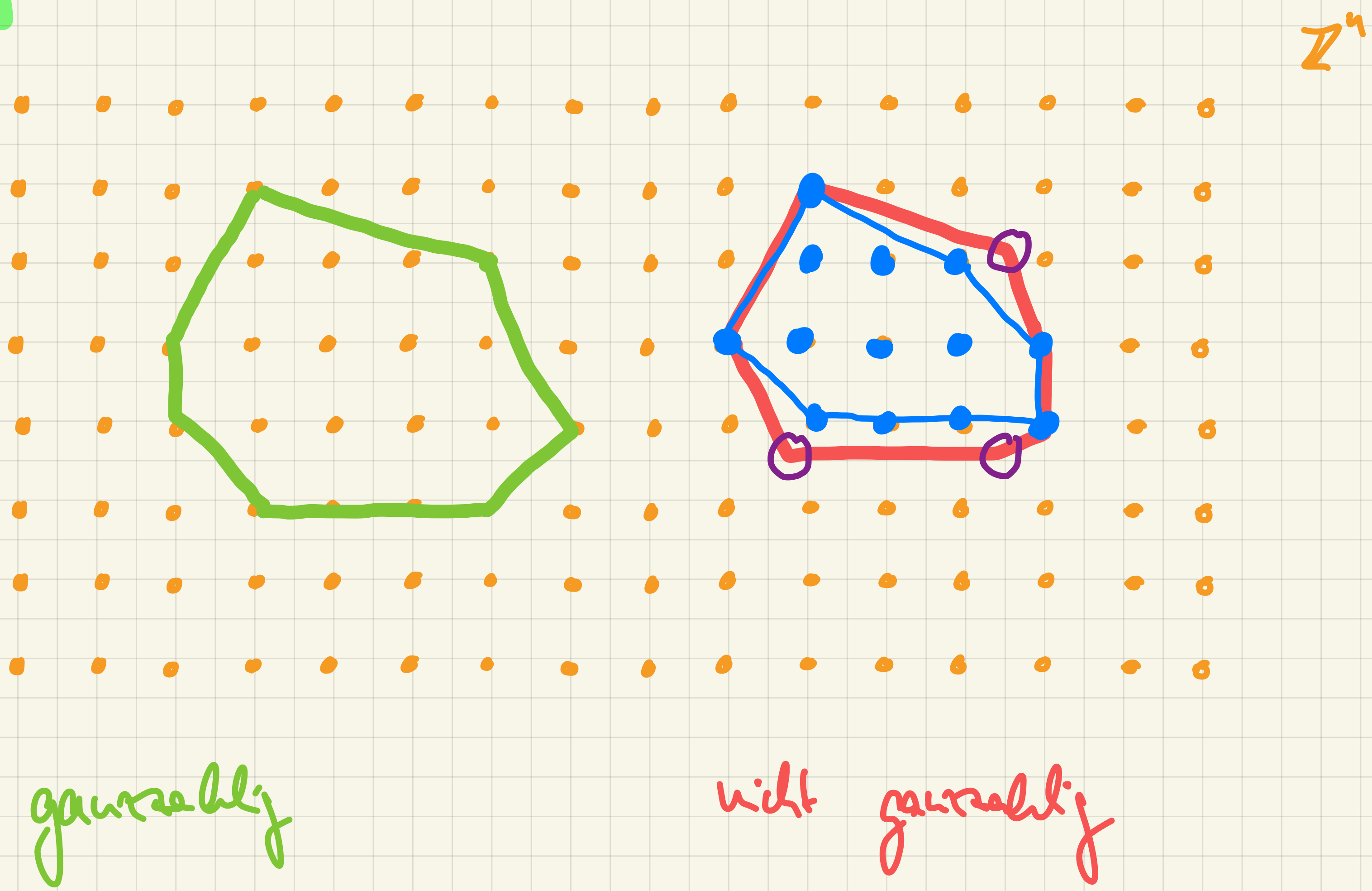
LP 21.5.19



Kap. 3: Total unimodulare Matrizen

Definition: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt "total unimodular" ("TU"), wenn für alle $I \subseteq [m]$, $J \subseteq [n]$ und $|I| = |J| \geq 1$

$$\det(A_{I,J}) \in \{-1, 0, 1\}$$

gilt. (Insbesondere ist dann $A \in \{-1,0,1\}^{m \times n}$.

Satz 3.1: Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

(i) A TU $\Longrightarrow$ $P^{\leq}(A,b)$ ganzzahlig für alle $b \in \mathbb{Z}^m$.

(ii) $P^{\leq}(A,b) \cap \mathbb{R}^n_+$ ganzzahlig für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ $\Longrightarrow$ A TU.

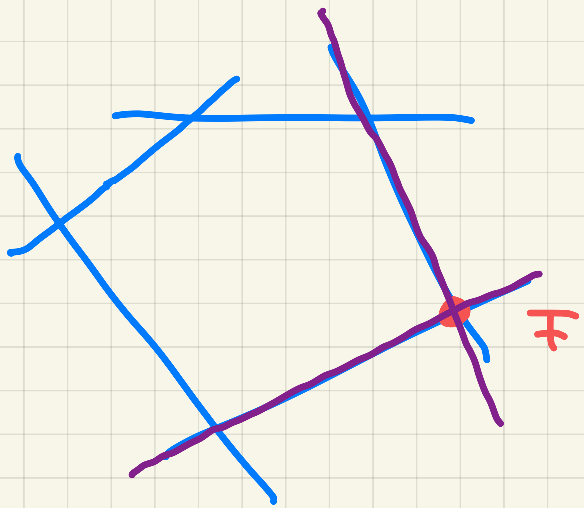
Beweis: (Hier nur Teil (i).)

- Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ TU, $b \in \mathbb{Z}^m$
- Sei F eine minimale Seite von $P^{\le}(A,b)$.

  (Es genügt nach Satz 2.9 zu zeigen: $F \cap \mathbb{Z}^n \overset{!}{\neq} \emptyset$)
- Da F minimal ist, gibt es $I \subseteq [m]$ mit

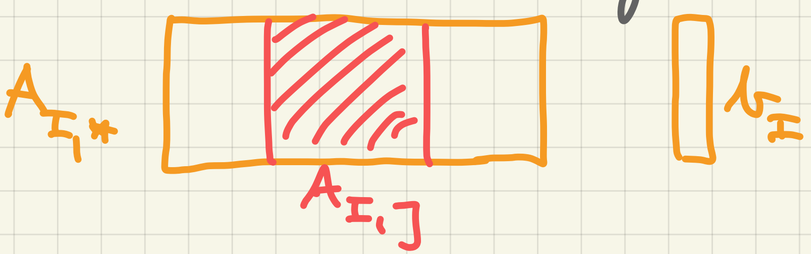
  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I,*} \cdot x = b_I\}$ und

  $\operatorname{rang}(A_{I,*}) = |I|$.



- Wähle $J \subseteq [n]$ mit $|J| = |I|$ und

  $A_{I,J}$ regulär.
- Cramer's Regel $\Longrightarrow$ $A_{I,*} \cdot x^* = b_I$ mit



$x^*_{[n]\setminus J} = 0$, $\forall j \in J: x^*_j = \dfrac{\det(\tilde{A}_j)}{\det(A_{I,J})}$, wobei $\tilde{A}_j$ aus $A_{I,J}$ entsteht, indem man Spalte j durch b_I ersetzt.

- Wegen $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ ist $\det(\tilde{A}_j) \in \mathbb{Z}$.
- Weil A TU ist $\det(A_{I,J}) \in \{-1, 1\}$.
- Also $x_j^* \in \mathbb{Z}$ für alle j. $\boxtimes$

<u>Bemerkungen:</u>

- $b \in \mathbb{Z}^n$ ist wichtig in Satz 3.1 (i) !

  [$\{x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x \leq \frac{1}{2}\}$ ist nicht ganzzahlig 

]

- A_1, A_2 TU impliziert i.A. <u>NICHT</u> (A_1, A_2) TU

  [z.B.: $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ TU, aber $\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ hat Determinante 2.]

- A TU $\Rightarrow$ $-A$, $(A, -A)$, $(A, \mathbb{I})$, $(A, -\mathbb{I})$, A^T

$$\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A \\ -\mathbb{I} \end{bmatrix} \text{ sind alle TU.}$$

<u>Definition:</u> Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $l, u \in \mathbb{R}^n$:

- $P_+^{\leq}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$
- $P^{=}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$
- $P_+^{=}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$
- $[l, u] := \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$

<u>Kor. 3.2:</u> Sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ TU, $b \in \mathbb{Z}^m$, $l, u \in \mathbb{Z}^n$, so sind folgende Polyeder ganzzahlig:

$P^{\leq}(A, b)$, $P_+^{\leq}(A, b)$, $P_+^{=}(A, b)$, $P^{\leq}(A, b) \cap [l, u]$, $P^{=}(A, b) \cap [l, u]$

Kor. 3.3: Sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ TU, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$ und

$\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b\} \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b,\ x \in \mathbb{Z}^n\}$$

$$= \min\{\langle b, y\rangle : A^T y = c,\ y \geq 0,\ y \in \mathbb{Z}^m\}$$

Bew.: $\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b,\ x \in \mathbb{Z}^n\}$

$$\underset{[\text{Satz 3.1}]}{=} \max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b\}$$

$$\underset{[\text{LP-Dualität}]}{=} \min\{\langle b, y\rangle : A^T y = c,\ y \geq 0\}$$

$$\underset{[\text{Kor. 3.2}]}{=} \min\{\langle b, y\rangle : A^T y = c,\ y \geq 0,\ y \in \mathbb{Z}^m\}$$ ☒

Bemerkung: Für eine ganzzahlige Dualitätsrelation wie in Kor. 3.3 genügt die Ganzzahligkeit von $P^{\leq}(A,b)$ i.A. nicht!

$$\Big[\ \max\{x : 2x \leq 2,\ x \in \mathbb{Z}\} = 1 \neq \min\{2y : 2y = 1,\ y \geq 0,\ y \in \mathbb{Z}\} = +\infty\ \Big]$$

Satz 3.4 (Kriterium von Ghouila-Houri)

Eine Matrix $A \in \{-1,0,1\}^{m \times n}$ ist genau dann TU, wenn für jede Teilmenge $J \subseteq [n]$ eine Partitionierung $J = J_+ \cup J_-$ $(J_+ \cap J_- = \emptyset)$ existiert mit

$$\sum_{j \in J_+} A_{*j} - \sum_{j \in J_-} A_{*j} \in \{-1,0,1\}^m .$$

Da A TU $\iff$ A^T TU ist, gilt der Satz analog für Zeilen- statt Spaltenteilmengen.