IP 27.5.19

Beweis zu Satz 3.4

"$\Rightarrow$": Übungen

"$\Leftarrow$": Es genügt, die Aussage für $m=n$ zu zeigen; das machen wir per Induktion nach n.

$n=1$: ✓

$n\geq 2$: Nach Induktionsvoraussetzung genügt es, für den Fall, dass A regulär ist,

$$|\det(A)| = 1$$

zu zeigen.

Nach Cramers Regel und Induktionsvoraussetzung ist

$$x := \det(A)\cdot(A^{-1})_{*,n} \in \{-1,0,1\}^n \setminus \{0\} \qquad (*)$$

Nach Voraussetzung existiert $y \in \{-1,0,1\}^n$ mit:

(1) $|y_j| = |x_j| \quad \forall j \in [n]$

(2) $Ay \in \{-1,0,1\}^n \setminus \{0\}$

$\chi(J^+) - \chi(J^-)$ mit $J := \{j \in [n] : x_j \neq 0\}$ und $J = J^+ \cup J^-$ wie im Kriterium.

$$\{-1,0,1\}^{n-1} \ni (Ay)_{[n-1]} = A_{[n-1],*}\cdot y = A_{[n-1],*}(\underbrace{y-x}_{\in\{-2,0,2\}^n\ (1)}) \in (2\mathbb{Z})^{n-1}$$

$Ax = \det(A)\cdot e_n$, also

$A_{[n-1],*}\cdot x = 0_{n-1}$

$$\Rightarrow Ay_{[n-1]} = 0 \underset{(2)}{\Longrightarrow} Ay = \pm e_n \Rightarrow \underbrace{y}_{\in\{-1,0,1\}^n} = \pm(A^{-1})_{*,n}$$

Also ist $(A^{-1})_{*,n} \in \{-1,0,1\}^n \setminus \{0\}$

Wegen (siehe (*)) $\det(A) \cdot (A^{-1})_{*,n} \in \{-1,0,1\}^n \setminus \{0\}$

ist $|\det(A)| = 1$. $\blacksquare$

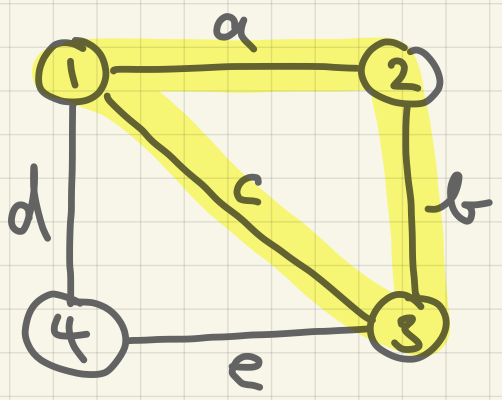
<u>Definition:</u> Für einen (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ ist

$$\mathrm{Inz}(G) \in \{0,1\}^{V \times E} \quad \text{mit}$$

$$\mathrm{Inz}(G)_{v,e} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } v \in e \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

für alle $v \in V$, $e \in E$ die "<u>Inzidenzmatrix</u>" von G.

Beispiel:



$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \det(\quad) = 2$$

NICHT TU

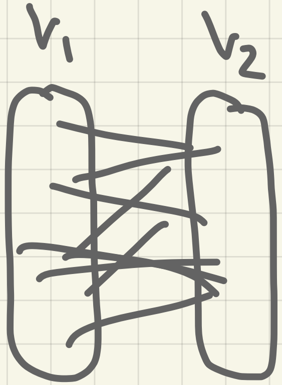
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0 \ ; \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Satz 3.5: Für jeden Graphen G gilt:

$$\mathrm{Inz}(G) \text{ TU} \iff G \text{ bipartit}$$

Beweis: "$\Longrightarrow$": Ist G nicht bipartit, so gibt es in G einen Kreis ungerader Länge; die zu diesem Teilgraphen gehörende Untermatrix von $\mathrm{Inz}(G)$ hat Determinante 2.

"$\Longleftarrow$": Sei $G=(V,E)$ bipartit mit Knotenbipartition



$$V = V_1 \cup V_2 \quad \big(E(V_1)=\emptyset,\ E(V_2)=\emptyset \big)$$

$$\mathrm{Inz}(G) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c|c} & 1 & \\ \hline & 1 & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, V_1 \\ \}\, V_2 \end{array}$$

Wir verwenden das Zeilen-Kriterium von Ghouila-Houri (Satz 3.4). Sei dann $W \subseteq V$; definiere $W^+ := W \cap V_1$, $W^- := W \cap V_2$. Dann ist

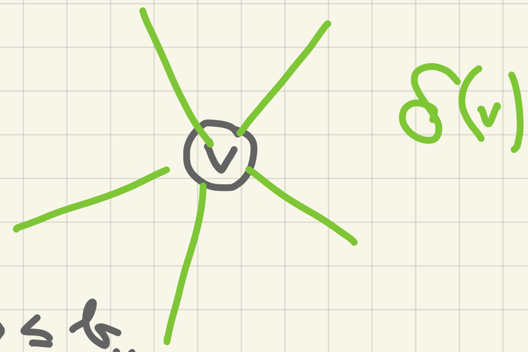
$$\underbrace{\sum_{v\in W^+} \mathrm{Inz}(G)_{v,*}}_{\in\{0,1\}^E} - \underbrace{\sum_{v\in W^-} \mathrm{Inz}(G)_{v,*}}_{\in\{0,1\}^E} \in \{-1,0,1\}^E$$

$\blacksquare$

Bem.: $\mathrm{Inz}(G)_{v,*} = \chi(\delta(v))$

$\in \{0,1\}^E$

$$\mathrm{Inz}(G)\cdot x \le b \iff \forall v \in V: \underbrace{\langle \chi(\delta(v)), x \rangle}_{x(\delta(v)) := \sum_{e\in\delta(v)} x_e} \le b_v$$



Kor. 3.6: Ist $G=(V,E)$ bipartit, so gilt für das Matching-Polytop

$$P_{\text{match}}(G) := \mathrm{conv}\{\chi(M) : M \subseteq E \text{ Matching}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}_+^E : \mathrm{Inz}(G)\cdot x \le \mathbb{1}_V\}$$

keine zwei Kanten in M haben einen gemeinsamen Knoten

[Beachte: $\{\chi(M) : M \subseteq E \text{ Matching}\} = \{x \in \mathbb{R}_+^E : \mathrm{Inz}(G)\cdot x \le \mathbb{1},\ x \in \mathbb{Z}^E\}$]

Kor. 3.7 (Satz von König)

In jedem bipartiten Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.

Teilmenge von Knoten, so dass jede Kante mindestens einen ihrer Endknoten in der Teilmenge hat.

Bew.: Sei $G = (V,E)$ bipartit.

$$\max \{ |M| : M \subseteq E \text{ Matching} \}$$

$$= \max \{ \langle \mathbb{1}_E, x \rangle : \mathrm{Inz}(G) \cdot x \leq \mathbb{1}_V ,\ x \geq 0_E ,\ x \in \mathbb{Z}^E \}$$

[Satz 3.5, Kor. 3.3]

$$= \min \{ \langle \mathbb{1}_V, y \rangle : \mathrm{Inz}(G)^T \cdot y \geq \mathbb{1}_E ,\ y \geq 0_V ,\ y \in \mathbb{Z}^V \}$$

$$= \min \{ \langle \mathbb{1}_V, y \rangle : y^T \cdot \mathrm{Inz}(G) \geq \mathbb{1}_E^T ,\ y \in \{0,1\}^V \}$$

charakteristischen Vektoren von Knotenüberdeckung

$\blacksquare$