IP 3.6.19 (Vertretung durch M. Friesen)

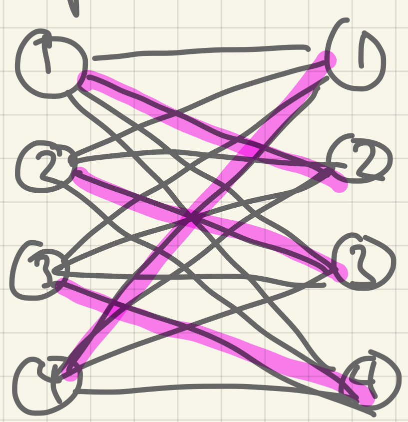
Korollar 3.8: Sei $P_{Birk}(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ die konvexe Hülle aller 0-1-Matrizen mit genau einer Eins in jeder Zeile und Spalte ("Permutationsmatrizen"); dann gilt

$$P_{Birk}(n) = \underbrace{\left\{ x \in \mathbb{R}_+^{n \times n} : \sum_j x_{ij} = 1 \ \forall i, \sum_i x_{ij} = 1 \ \forall j \right\}}_{\text{"doppelt-stochastische Matrizen"}}$$

Beweis: $P_{Birk}(n)$ ist die Seite von $P_{match}(K_{n,n})$, welche durch

$$\mathrm{inz}(K_{n,n}) \cdot x = \mathbb{1}$$

definiert ist (wobei $K_{n,n}$ der vollständig bipartite Graph auf $n + n$ Knoten ist).



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(M) = x$$

Def.: Für einen gerichteten Graphen $D=(V,A)$ ist

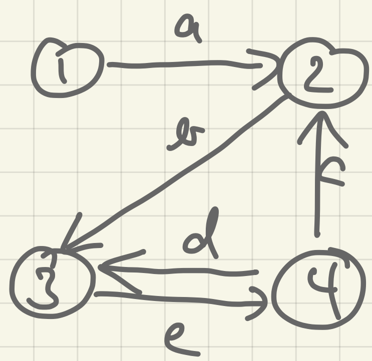
$$\mathrm{Inz}(D) \in \{-1,0,1\}^{V\times A}$$

mit

$$\mathrm{Inz}(D)_{v,a} = \begin{cases} -1, & \text{falls } a \in \delta^{\text{aus}}(v) \\ +1, & \text{falls } a \in \delta^{\text{ein}}(v) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die "Inzidenzmatrix" von D.

Bsp.:



$$\begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Satz 3.9: Die Inzidenzmatrix eines jeden gerichteten Graphen ist TU.

Beweis: Ghouila-Houri (Zeilenversion): Für $W \subseteq V$ wähle $W_+ := W$, $W_- := \emptyset$. $\blacksquare$

Bem.: Für $D=(V,A)$ und $x\in\mathbb{R}^A$ ist

$$\forall v: \langle \mathrm{Inz}(D)_{v,*}, x\rangle = x(\delta^{\mathrm{ein}}(v)) - x(\delta^{\mathrm{aus}}(v))$$

Korollar 3.10: Sei $D=(V,A)$ Digraph und $f,c\in\mathbb{Z}_+^A$. Dann gilt

$$A = \max\{\langle f,x\rangle : \mathrm{Inz}(D)\cdot x = 0, x\geq 0, x\leq c\}$$

$$\|$$

$$B = \min\{\langle c,y\rangle : \mathrm{Inz}(D)^T\cdot y + z \geq f, z\geq 0, y\in\mathbb{Z}^V, z\in\mathbb{Z}^A\}$$

Satz 3.11 (MAX-FLOW-MIN-CUT Theorem)

Sei $D=(V,A)$ Digraph, $s,t\in V$ $(s\neq t)$ und $c\in(\mathbb{R}_+\cup\{\infty\})^A$ (mit $c_{ts}=+\infty$). Dann ist der maximale Wert

$$\max\left\{\sum_{a\in\delta^{\mathrm{aus}}(s)} x_a : x(\delta^{\mathrm{aus}}(v)) = x(\delta^{\mathrm{ein}}(v))\ \forall v\in V\setminus\{s,t\},\ 0_A\leq x\leq c\right\}$$

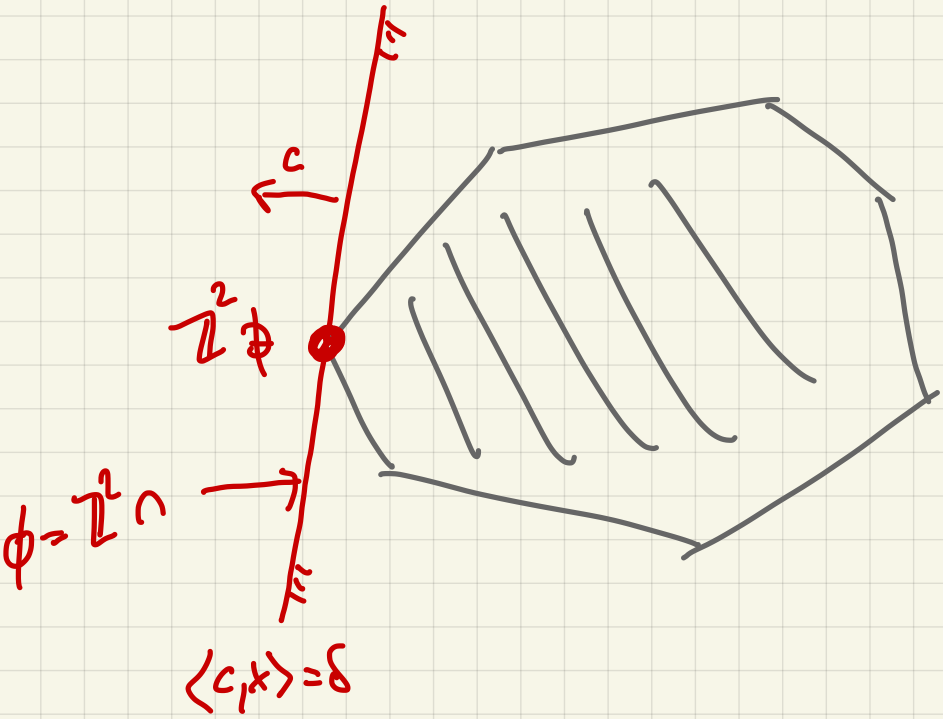
aller c-respektierenden s-t-Flüsse gleich der minimalen c-Kapazität

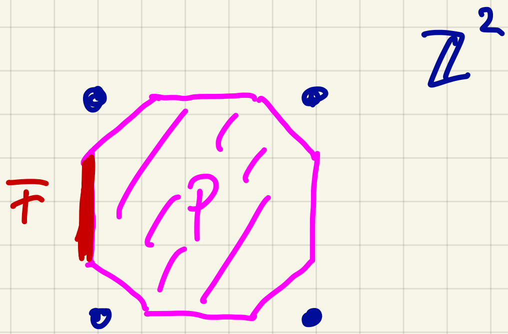
$$\min \left\{ c(\delta^{aus}(S)) : S \subseteq V,\ s \in S,\ t \notin S \right\}$$

aller s-t-Schnitte.

<u>Beweis:</u> Folgt leicht mit Kor. 3.10. $\square$

4. Total Duale Ganzzahligkeit





Satz 4.1

Ist F eine minimale Seite eines rationalen Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, so gibt es eine F definierende rationale Ungleichung $\langle c,x\rangle \leq \delta$ und

$$\{x \in \mathbb{Z}^n : \langle c,x\rangle = \delta\} = \emptyset.$$

Bew.: • Sei $P = P^{\leq}(A, b)$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^{n}$ und F eine minimale Seite von P mit $F \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$.

• Mit $I := Eq(F)$: $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A_{I,*} \cdot x = b_I\}$

• $F \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset \underset{[\text{Satz } 1.8(i)]}{\Longrightarrow}$

$$\exists y \in \mathbb{Q}^I : \underbrace{y^T \cdot A_{I,*}}_{=: c} \in \mathbb{Z}^n, \ \underbrace{\langle y, b_I \rangle}_{=: \delta} \notin \mathbb{Z}$$

• Können annehmen, dass $y \geq \mathbb{1}$ ist [ggf. Addition von $k \cdot \mathbb{1}$ zu y für genügend großes $k \in \mathbb{N}$].

• Es gilt: $\{x \in \mathbb{Z}^n : \langle c, x \rangle = \delta\} = \emptyset$ und:

– $\langle c, x \rangle \leq \delta$ gültig für P [da $y \geq \mathbb{0}$]

- $F = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{Ax \le b, \ \langle A_{i,*}, x \rangle = b_i \ \forall i \in I}_{} \}$

$$\Updownarrow \ y_i > 0 \ \forall i \in I$$

$$Ax \le b, \ \langle \underbrace{\sum_{i \in I} y_i A_{i,*}}_{c}, x \rangle = \underbrace{\sum_{i \in I} y_i b_i}_{\delta}$$

$$= \{ x \in P : \langle c, x \rangle = \delta \} \qquad \blacksquare$$

<u>Satz 4.2</u>: Ein rationales Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ganzzahlig, wenn für alle $c \in \mathbb{Z}^n$ gilt:

$$\max \{ \langle c, x \rangle : x \in P \} \in \mathbb{Z} \cup \{ \infty, -\infty \}$$

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$": $P = P_I \Rightarrow \forall c \in \mathbb{Z}^n$:

$$\sup \{ \langle c, x \rangle : x \in P \} = \sup \{ \langle c, x \rangle : x \in P \cap \mathbb{Z}^n \}$$

$$\in \mathbb{Z} \cup \{ \infty, -\infty \}$$

"$\Leftarrow$": • Sei $P \neq P_I$

• Satz 2.9 $\Longrightarrow$ $\exists$ minimale Seite F von P mit
$$F \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$$

• Satz 4.1 $\Longrightarrow$ $\exists$ F definierende rationale Ungleichung $\langle c, x \rangle \leq \delta$ mit
$$\{x \in \mathbb{Z}^n : \langle c, x \rangle = \delta\} = \emptyset \quad (*).$$

• Können annehmen [Skalierung]:
$$c \in \mathbb{Z}^n \quad \text{mit} \quad \operatorname{ggT}(c_1, \dots, c_n) = 1.$$

• Also $\Lambda\{c_1, \dots, c_n\} = \mathbb{Z}$, daher wegen $(*)$ $\delta \notin \mathbb{Z}$.

$\blacksquare$

Definition: Ein rationales System $Ax \leq b$ ($A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$) heißt <u>total dual ganzzahlig</u> (totally dual integral = <u>TDI</u>), wenn für jedes $c \in \mathbb{Z}^n$ das zu $\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b\}$ duale LP

$$\min\{\langle b, y\rangle : A^T y = c,\ y \geq 0\}$$

eine ganzzahlige Optimallösung $y^* \in \mathbb{N}^m$ hat (sofern der Optimalwert endlich ist).

Bemerkung: Ist A TU, so ist $Ax \leq b$ TDI für alle b.

$$\left[\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b\} = \min\{\langle b, y\rangle : A^T y = c,\ y \geq 0\}\right]$$