IP 4.6.19 (Vertretung durch J. Frede)

Satz 4.3: Seien $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, so dass $Ax \le b$ TDI ist. Dann gelten:

(i) $P^{\le}(A,b)$ ist ganzzahlig.

(ii) Für alle $c \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$\max\{\langle c,x\rangle : Ax \le b\} \notin \{-\infty, \infty\}$$

gilt

$$\max\{\langle c,x\rangle : Ax \le b,\ x \in \mathbb{Z}^n\}$$
$$= \min\{\langle b,y\rangle : A^T y = c,\ y \ge 0,\ y \in \mathbb{Z}^m\}$$

Beweis: • Für alle $c \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$\delta := \max\{\langle c,x\rangle : Ax \le b\} \notin \{-\infty, \infty\}$$

gilt:

$$\delta \underset{\substack{[\text{LP-Dualität,}\\ \text{TDI}]}}{=} \min\{\langle b, y\rangle : A^T y = c, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^m\}$$

$\langle b, y\rangle \in \mathbb{Z}^m$

$\in \mathbb{Z}$

- Satz 4.2 $\Longrightarrow$ $P^{\leq}(A, b)$ ganzzahlig
- Insbesondere $\min\{\dots\} = \delta = \max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}\}$

$\boxtimes$

Beispiel: Unabhängigkeitspolytope von Matroiden

- Sei $\mathcal{I} \subseteq 2^{[m]}$ die Menge der unabhängigen Mengen eines Matroids, d.h.:

  - $\emptyset \in \mathcal{I}$
  - $J \subseteq I \in \mathcal{I} \Longrightarrow J \in \mathcal{I}$
  - $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$, $|I_1| < |I_2|$
    $\Rightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

(z.B. die kreisfreien Kantenteilmengen eines Graphen oder die linear unabhängigen Teilmengen der Spalten einer Matrix)

- Für $T \subseteq [m]$:

$$r(T) := \max \{ |I| : I \subseteq T, \, I \in \mathcal{I} \}$$

("Rang von T")

- $P := \operatorname{conv} \{ \chi(I) : I \in \mathcal{I} \}$

$$\subseteq \{ \underbrace{x \in \mathbb{R}^m_+ : x(T) \leq r(T) \ \forall T \subseteq [m]}_{(*)} \}$$

$$\left[\text{Für } x = \chi(I) : \ x(T) = \sum_{e \in T} x_e = |T \cap I| \right]$$

<u>Bem:</u> (*) ist TDI (und daraus folgt mit einigen kleinen Überlegungen, dass "$\subseteq$" sogar "$=$" ist).

<u>Bew:</u> – Sei $c \in \mathbb{Z}^m$, o.B.d.A. sei

$$c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \cdots \geq c_p > 0 \geq c_{p+1}, \ldots, c_m .$$

– Sei $I^* \in \mathcal{I}$ die Greedy-Lösung von

$$\max \{ \sum_{i \in I} c_i : I \in \mathcal{I} \},$$

d.h. I^* entsteht mittels folgenden Algorithmus:

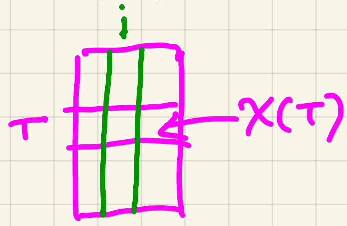
① $I^* \leftarrow \emptyset$

② Für $i = 1, \dots, p$:

Falls $I^* \cup \{i\} \in \mathcal{I}$:

$I^* \leftarrow I^* \cup \{i\}$

- $\sum_{i \in I^*} c_i = \langle c, \chi(I^*) \rangle$



$$\leq \max \left\{ \langle c, x \rangle : \boxed{x(T) \leq r(T) \ \forall T \subseteq [m]} \atop x \geq 0 \right\}$$

$$= \min \left\{ \sum_{T \subseteq [m]} r(T) \cdot y_T : \begin{array}{l} y_T \geq 0 \ \forall T \subseteq [m] \\ \sum_{T \subseteq [m] : i \in T} y_T \geq c_i \ \forall i \in [m] \end{array} \right\}$$

- $I^* = \{ i_1, i_2, \dots, i_l \}$ mit $i_1 > i_2 > \dots > i_l$

- $y^*_{[j]} := c_j - c_{j+1} \quad \forall j \in [p-1]$

  $y^*_{[p]} := c_p$

  $y^*_T := 0$ für alle anderen $T \subseteq [m]$.

- Wegen der Sortierung der Grundmenge ("o.B.d.A.") ist $y^* \geq 0$ und wegen $c \in \mathbb{Z}^m$ ist $y^* \in \mathbb{Z}^{2^{[m]}}$.

- Für jedes $i \in [m]$:

$$\sum_{\substack{T \subseteq [m]: \\ i \in T}} y^*_T = \begin{cases} c_i & , \text{falls } i \leq p \\ 0 \geq c_i & , \text{falls } i > p \end{cases}$$

- y^* ist also ein ganzzahliger, dual zulässiger Vektor.

- $\sum_{T \subseteq [m]} r(T) \cdot y^*_T$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} r([j]) \cdot (c_j - c_{j+1}) + r([p]) \cdot c_p$$

$$= \underbrace{r([1])}_{= \begin{cases} 1, & \text{falls } \{1\} \in I \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \in I^* \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \cdot c_1 + \sum_{j=2}^{p} \Big(\underbrace{r([j]) - r([j-1])}_{\overset{\text{Austauschaxiom}}{=} \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in I^* \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} \Big) c_j$$

$$= \sum_{i \in I^*} c_i$$

- Also ist y^* ganzzahlige optimale Duallösung. $\blacksquare$