IP 11.6.19

Skalierung und TDI

- Seien $Ax \leq b$ TDI und $\sigma \in \{1,2,3,\dots\}$.
  - $(\sigma A)x \leq \sigma b$ ist i.A. nicht TDI

    [$1 \cdot x \leq 1$ ist TDI, aber $2 \cdot x \leq 2$ nicht]
  - $\left(\frac{1}{\sigma} A\right) x \leq \frac{1}{\sigma} b$ ist TDI

    [Duallösungen werden mit σ skaliert.]
- Ist $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und σ ein gemeinsames Vielfaches aller Subdeterminanten von A, so ist

$$\left(\frac{1}{\sigma} A\right) x \leq \frac{1}{\sigma} b$$

TDI.

[Beweis: Sei $c \in \mathbb{Z}^n$ so, dass (*) $\max\{\langle c,x\rangle : (\frac{1}{\sigma}A)x \le \frac{1}{\sigma}b\} \in \mathbb{R}$.

Sei y^* optimale Eckenlösung von

$$\min\{\langle \tfrac{1}{\sigma}b, y\rangle : A^T y = c^T, y \geq 0\}$$

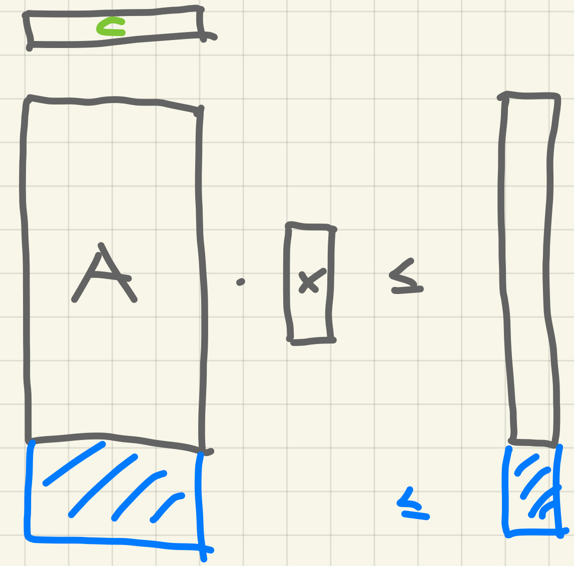
Cramer's Regel $\Longrightarrow$ σy^* ganzzahlig

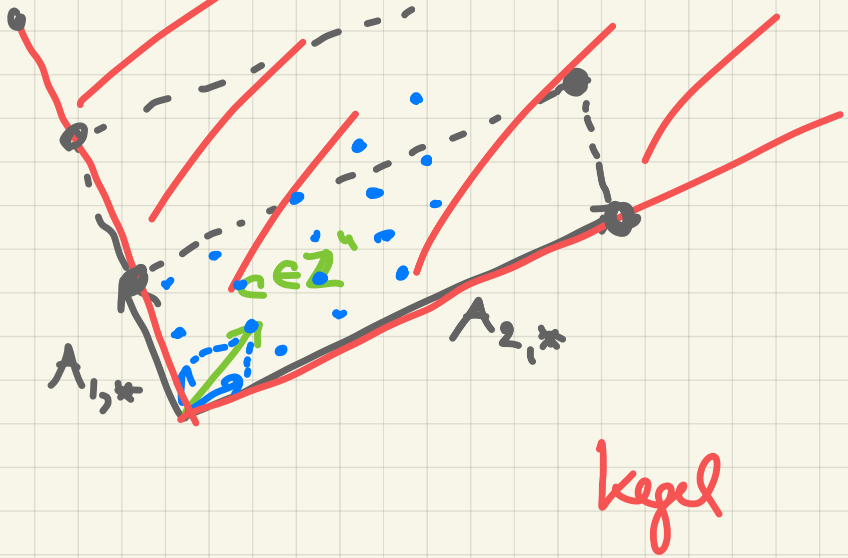
σy^* ist Optimallösung des Dualen zu (*):

$$\min\{\langle \tfrac{1}{\sigma}b, \tilde{y}\rangle : \underbrace{(\tfrac{1}{\sigma}A)^T \tilde{y} = c^T}_{\Updownarrow \; A^T \cdot (\frac{1}{\sigma}\tilde{y}) = c^T}, \tilde{y} \geq 0\}$$

]

Man kann also jedes rationale Ungleichungssystem durch Skalieren mit einem positiven rationalen Faktor in ein TDI-System transformieren.





$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$