JP 17.6.19

<u>Satz 4.4:</u> Ein System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ ist genau dann TDI, wenn für jede (minimale) Seite $F \neq \emptyset$ von $P^{\leq}(A,b)$ die Vektoren

$$A_{i,*} \in \mathbb{Z}^n \quad (i \in \mathrm{Eq}_F(F))$$

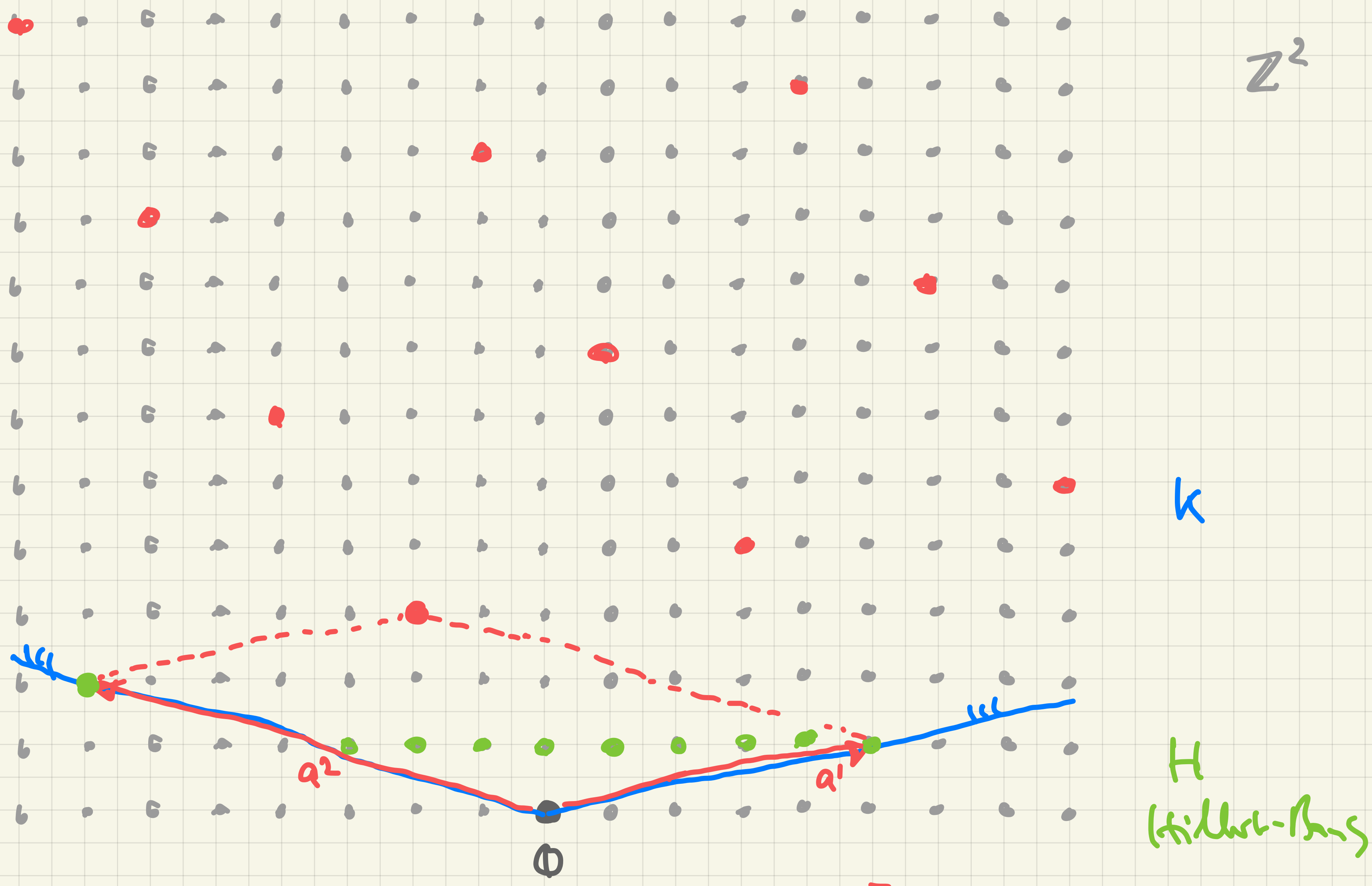
eine Hilbert-Basis von

$$\mathrm{ccone}\{A_{i,*} : i \in \mathrm{Eq}_F(F)\} = N_F(P^{\leq}(A,b))$$

bilden.

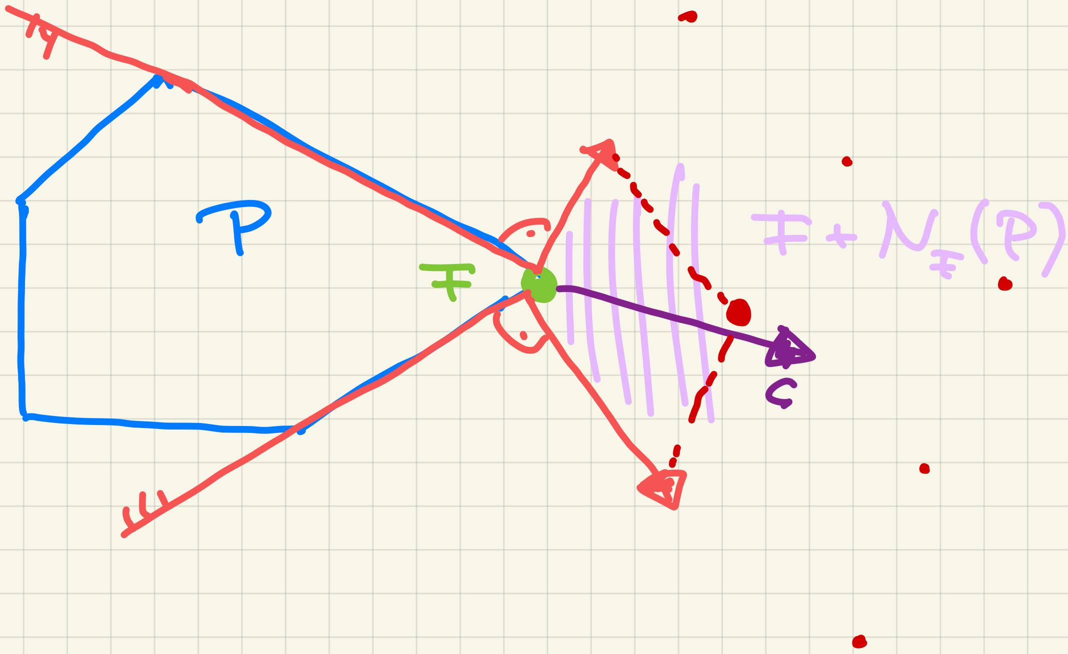
↑ Normalenkegel von P in F

(Erinnerung: $H \subseteq K$ Hilbert-Basis von $K \Leftrightarrow K \cap \mathbb{Z}^n = \Lambda^{\geq}(H)$)



$\mathrm{cone}\{a^1, a^2\} = K$

$\Lambda^{\mathbb{Z}}\{a^1, a^2\}$



Kor. 4.5: Die Zeilen von $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ bilden genau dann eine Hilbert-Basis, wenn $Ax \leq 0$ TDI ist.

Bew.: Einzige minimale Seite von $P^{\leq}(A, 0)$ ist $\ker(A)$. $\boxtimes$

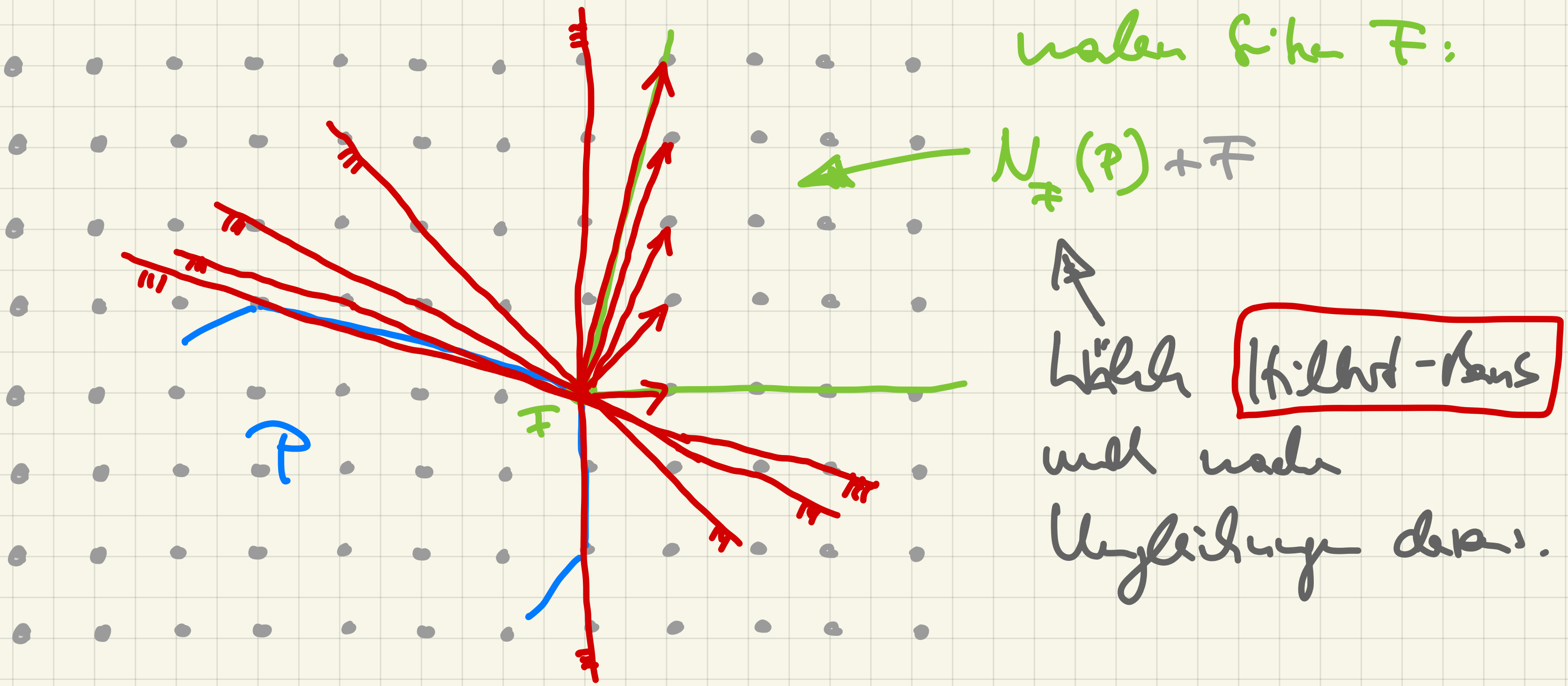
Satz 4.6:

Für jedes rationale Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es ein TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und

$$P = P^{\leq}(A, b);$$

b kann man dabei genau dann als ganzzahligen Vektor wählen, wenn $P = P_I$ (d.h. P ganzzahlig) ist.

Zum Beweis:



<u>Bem.:</u> Ist $P = P^{\leq}(A,b)$ und $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, so gibt es i.A. keine TDI-Darstellung

$$P = P^{\leq}(\tilde{A}, \tilde{b})$$

mit $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ TDI und $\tilde{A} \in \mathbb{Z}^{\tilde{m} \times n}$, $\tilde{b} \in \mathbb{Q}^{\tilde{m}}$

mit $P = P^{\leq}(\tilde{A}, \tilde{b})$ und $\tilde{m}$ polynomial beschränkt in der Kodierungslänge von (A,b)

(nicht einmal, wenn P ganzzahlig.)

5. Der Chvátal-Gomory Abschluss

Notation: Für $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$:

- $H^{\leq}(a,\beta) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leq \beta\}$
- $H^{=}(a,\beta) := \{x \in \mathbb{R} : \langle a, x\rangle = \beta\}$

Beobachtung: Für $a \in \mathbb{Z}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$H^{\leq}(a,\beta)_I \subseteq H^{\leq}(a,\lfloor\beta\rfloor) \subseteq H^{\leq}(a,\beta)$$

Lem. 5.1: Für $a \in \mathbb{Z}^n$ und $\mathrm{ggT}(a_1,\dots,a_n) = 1$ und $\beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$H^{\leq}(a,\beta)_I = H^{\leq}(a,\lfloor\beta\rfloor)$$

Beweis: "$\subseteq$": ✓

"$\supseteq$": Es genügt, zu zeigen, dass $H^{\leq}(a, \lfloor \beta \rfloor)$ ganzzahlig ist.

Nach Satz 2.9 genügt es, zu zeigen, dass

$H^{=}(a, \lfloor \beta \rfloor) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$ ist, d.h., dass es

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^n$ gibt mit $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = \lfloor \beta \rfloor$.

Das ist aber wegen

$$\Lambda^{=}\{a_1, \dots, a_n\} = \Lambda^{=}\{\operatorname{ggT}(a_1, \dots, a_n)\} = \mathbb{Z} \ni \lfloor \beta \rfloor$$ klar.

☺