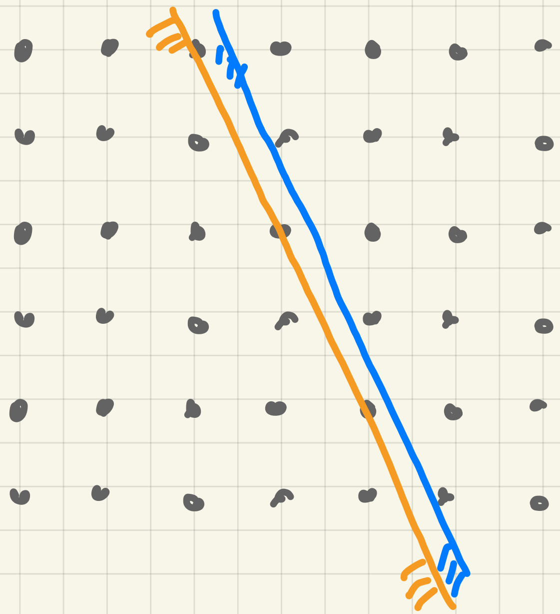
IP 18.6.19



$H^{\le}(a,\beta)$ $\quad (a\in\mathbb{Z}^n, \beta\in\mathbb{R})$

$ggT(a_1,\dots,a_n)=1$

$$H^{\le}(a,\beta)_I = H^{\le}(a,\lfloor\beta\rfloor)$$

Notation: $\mathcal{H}^n := \{ H^{\le}(a,\beta) : a\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\}, \beta\in\mathbb{Q} \}$

(Menge der rationalen Halbräume in $\mathbb{R}^n$)

Definition: Für $P\subseteq\mathbb{R}^n$ heißt

$$P' := \bigcap_{\substack{H\in\mathcal{H}^n:\\ P\subseteq H}} H_I$$

der Chvátal-Gomory-Abschluss (CG-Abschluss) von P.

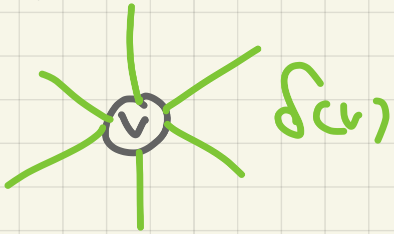
Beobachtung: $P_I \subseteq P' \subseteq P$

$\uparrow$ (für rationale Polyeder P)

Beispiel: Matching-Polytop

- Für $G=(V,E)$ (ungerichteter Graph) sei

$$P := \left\{ x \in \mathbb{R}^E : \underbrace{x(\delta(v))}_{\sum_{e \in \delta(v)} x_e} \le 1 \quad \forall v \in V, \quad 0 \le x \le 1 \right\}$$

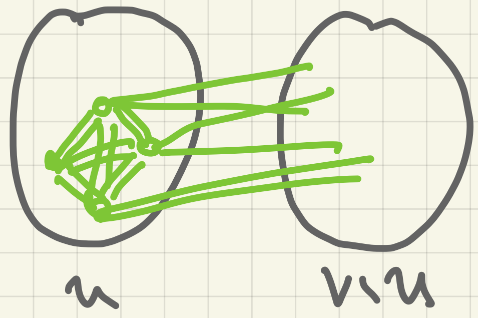


- $P_I = \operatorname{conv}\{\chi(M) : M \subseteq E \text{ Matching}\}$

($P = P_I \iff G$ bipartit)

- Für $U \subseteq V$ kann man folgendermaßen eine für P gültige (rationale) Ungleichung konstruieren:

$$\underbrace{\sum_{v \in U} \left[x(\delta(v)) \le 1 \right]}_{} + \underbrace{\sum_{e \in \delta(U)} \left[-x_e \le 0 \right]}_{}$$



$$\Rightarrow \underbrace{2 \cdot x(E(U)) + 1 \cdot x(\delta(U)) + (-x(\delta(U)))}_{2x(E(U))} \le \underbrace{|U| + 0}_{|U|} \quad \text{gültig für } P$$

$$\Rightarrow \quad x(E(U)) \le \frac{|U|}{2} \quad \text{gültig für } P$$

$$\Rightarrow \quad x(E(U)) \le \left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor \quad \text{gültig für } P'$$

$$\Rightarrow \quad P' \subseteq Q := \Big\{ x \in \mathbb{R}^E : \; x(\delta(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V$$

$$x(E(U)) \leq \left\lfloor \frac{|U|}{2} \right\rfloor \quad \forall\, U \subseteq V,\ |U| \in 2\mathbb{Z}+1$$

$$\mathbb{0} \leq x \leq \mathbb{1} \Big\}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{P_I \subseteq P' \subseteq Q}_{\text{[komb. Opt.]}} \subseteq P$$

Hier ist also $P_I = P'$!

Satz 5.2: Ist $Ax \le b$ TDI und $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, so ist

$$P^{\le}(A,b)' = P^{\le}(A, \lfloor b \rfloor)$$

$$\left(\lfloor b \rfloor = (\lfloor b_1 \rfloor, \dots, \lfloor b_m \rfloor)\right).$$

Beweis: "$\subseteq$": ✓ $\leftarrow$ $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$

"$\supseteq$": Es genügt, zu zeigen, dass für alle $c \in \mathbb{Z}^n$, $\delta \in \mathbb{Q}$ mit $\langle c, x \rangle \le \delta \quad \forall x \in P^{\le}(A,b)$

$$\langle c, x \rangle \le \lfloor \delta \rfloor \quad \forall x \in P^{\le}(A, \lfloor b \rfloor)$$

gilt.

Wir können annehmen: $P^{\le}(A,b) \ne \emptyset$

[Sonst $P^{\le}(A,b)' = \emptyset = P^{\le}(A, \lfloor b \rfloor)$]

Weil $Ax \le b$ TDI ist, gibt es $y \in \mathbb{N}^m$ mit:

$$y^T A = c^T, \quad \langle b, y \rangle = \max\{\langle c, x\rangle : Ax \le b\} \le \delta$$

Dann gilt für alle $x \in P^{\le}(A, \lfloor b \rfloor)$:

$$\langle c, x \rangle = \langle y^T A, x \rangle = \langle \underbrace{y}_{\ge 0}, \underbrace{Ax}_{\le \lfloor b \rfloor} \rangle \le \langle y, \lfloor b \rfloor \rangle$$

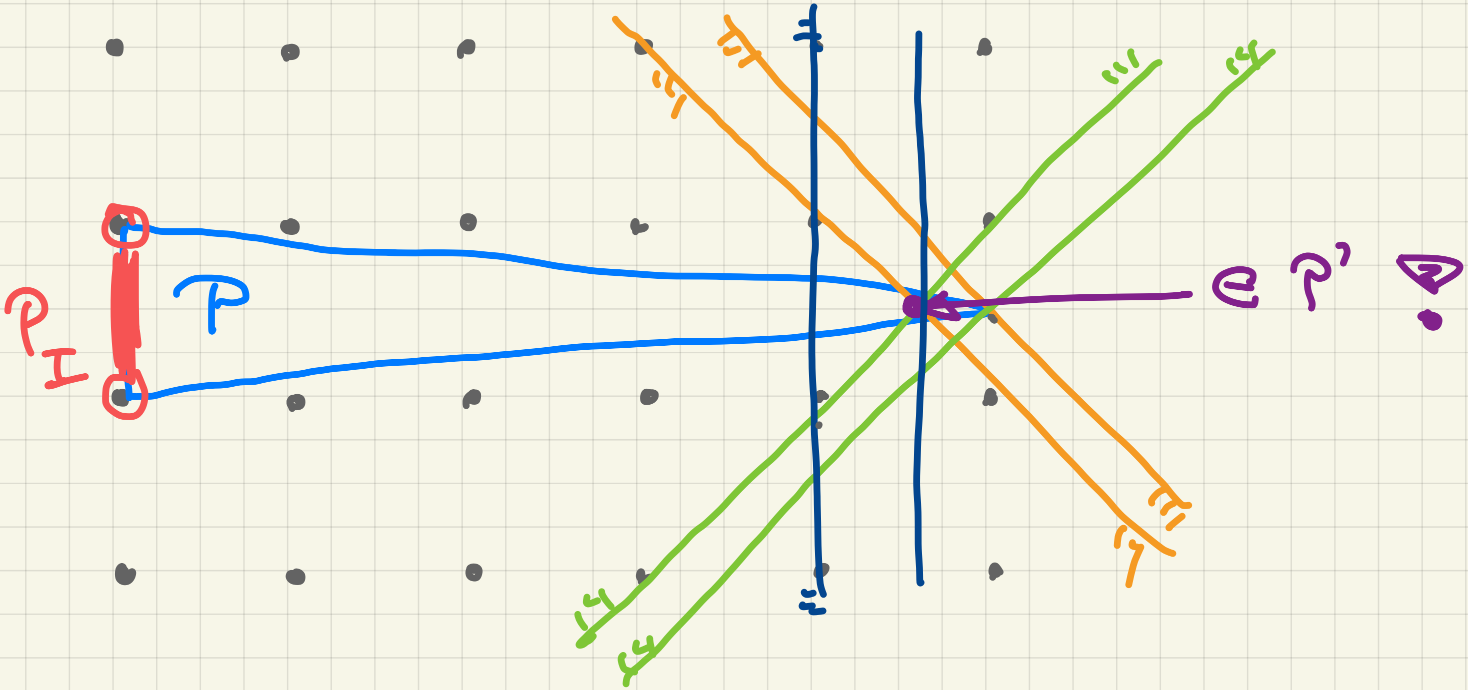
$$= \sum_{i=1}^m \underbrace{y_i}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\lfloor b_i \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} = \sum_{i=1}^m \lfloor \underbrace{y_i}_{\ge 0} \cdot \underbrace{\lfloor b_i \rfloor}_{\le b_i} \rfloor$$

$$\le \sum_{i=1}^m \lfloor y_i b_i \rfloor \le \left\lfloor \sum_{i=1}^m y_i b_i \right\rfloor$$

$$= \lfloor \underbrace{\langle b, y \rangle}_{\le \delta} \rfloor \le \lfloor \delta \rfloor$$

Kor. 5.3: Für jedes rationale Polyeder P ist P' ebenfalls ein rationales Polyeder.

Beweis: Folgt aus Satz 5.2 und Satz 4.6. $\blacksquare$



__Definition:__ Für $P \subseteq \mathbb{R}^n$ seien $P^{(0)} := P$ und

$$P^{(t)} := \left(P^{(t-1)}\right)' \quad \text{für } t \in \{1,2,\dots\}.$$

__Bem.:__ $P = P^{(0)} \supseteq P^{(1)} \supseteq P^{(2)} \supseteq P^{(3)} \supseteq \cdots \supseteq P_I$

__Satz 5.6:__ Für jedes rationale Polyeder P gibt es ein $t \in \mathbb{N}$ mit

$$P^{(t)} = P_I.$$

__Beweis:__ (Hier ohne.)