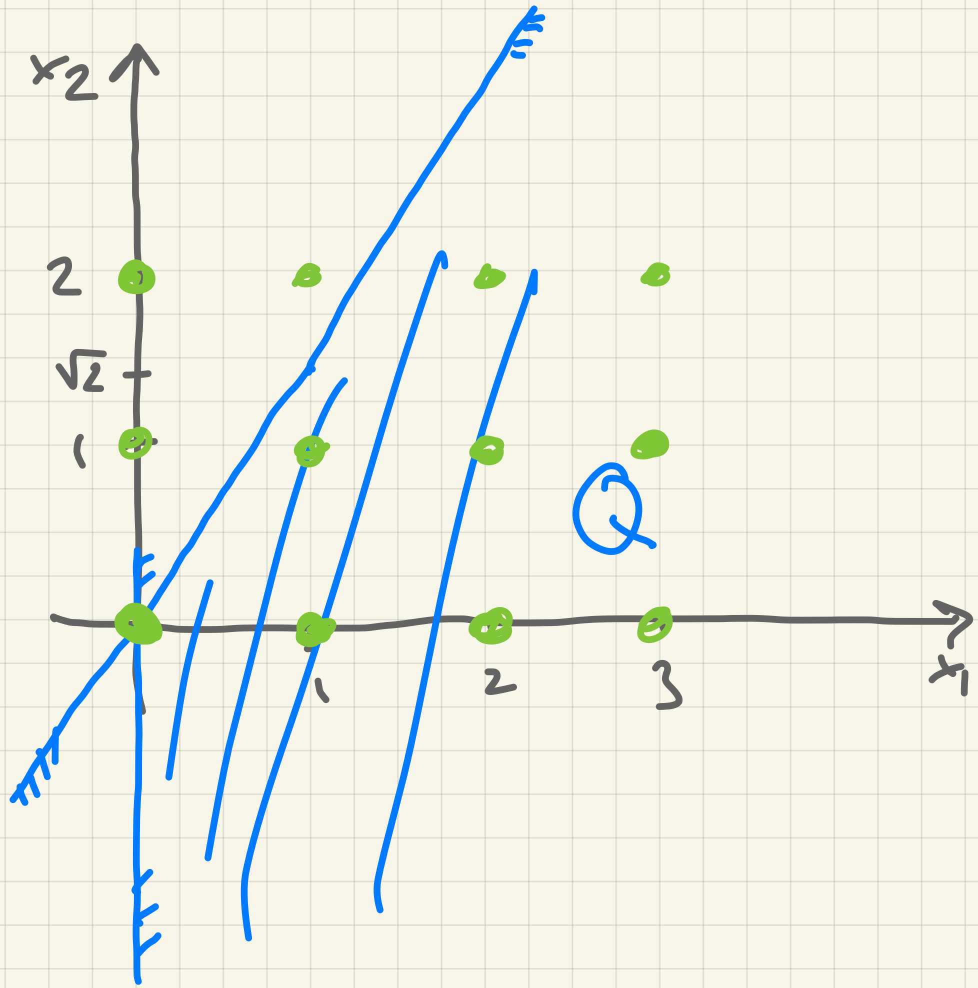
$\boxed{\text{IP } 24.6.19}$ Bem. zu Satz 5.6: Rationalität ist wesentlich

Für $Q := \{(x_1,x_2) : x_2 \leq \sqrt{2}\cdot x_1 \;,\; x_1 \geq 0\}$ ist

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ Q'}}{Q} = Q^{(1)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ Q''}}{Q^{(2)}} = Q^{(3)} = \cdots \neq Q_I = Q \setminus \{(x_1,x_2) : x_2 = \sqrt{2}\cdot x_1 \;,\; x_1 > 0\}$$



Kap. 6: Branch-and-Cut und Schnittebenen

<u>MIP:</u> Mixed-Integer (Linear) Program,

gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

<u>Eingabe:</u> $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $G \in \mathbb{Q}^{m \times p}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $h \in \mathbb{Q}^p$

<u>Aufgabe:</u> $\max \left\{ \langle c, x \rangle + \langle h, y \rangle : Ax + Gy \leq b,\ x \in \mathbb{Z}^n,\ y \in \mathbb{R}^p \right\}$ $(*)$

<u>Branch-and-Bound</u>

1. Initialisierung:
   - $\mathcal{S} \leftarrow \{*\}$ ("aktive Subprobleme")
   - $(x^{best}, y^{best}) \leftarrow$ undefiniert (beste bisher gefundene Lösung)
   - $\omega \leftarrow -\infty$ (Wert von (x^{best}, y^{best}))

2. Solange $\mathcal{S} \neq \emptyset$:

a) • Wähle $\Pi \in \mathcal{S}$:

$$(\Pi) \quad \max\left\{\langle c,x\rangle + \langle h,y\rangle : \tilde{A}x + \tilde{G}y \le \tilde{b},\ x \in \mathbb{Z}^n,\ y \in \mathbb{R}^p\right\}$$

• $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \setminus \{\Pi\}$

b) Bestimme Optimallösung (x^*, y^*) der "LP-Relaxierung"

$$\xi^* := \max\left\{\langle c,x\rangle + \langle h,y\rangle : \tilde{A}x + \tilde{G}y \le \tilde{b},\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^p\right\}$$

("BOUND": obere Schranke an Optimalwert von Π)

c) Falls $\xi^* > \omega$:

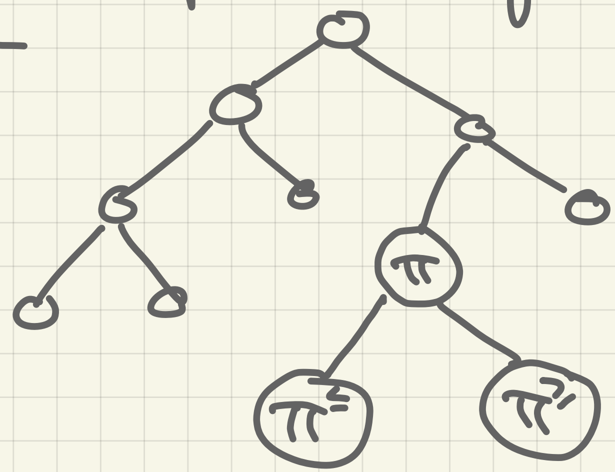
• Falls $x^* \in \mathbb{Z}^n$ ($\Rightarrow (x^*, y^*)$ zulässig für *, optimal für Π)

- $(x^{best}, y^{best}) \leftarrow (x^*, y^*)$
- $\omega \leftarrow \xi^*$

- Sonst:
  - Wähle $i \in [n]$ mit $x_i^* \notin \mathbb{Z}$
  - Erzeuge Subprobleme $\Pi^{\le}$ und $\Pi^{\ge}$ aus Π durch Hinzufügen von $x_i \le \lfloor x_i^* \rfloor$ bzw. $x_i \ge \lceil x_i^* \rceil$
  - $\mathcal{S} \Leftarrow \mathcal{S} \cup \{\Pi^{\le}, \Pi^{\ge}\}$ ("BRANCH")

<u>Bemerkungen</u>

- Die während eines Laufs des Algorithmus erzeugten Subprobleme bilden einen Baum



"Branch-and-Bound Baum"

- Falls $\xi^* \le \omega$, so hat Π keine bessere Lösung als die schon für (*) gefundene Lösung (x^{best}, y^{best}).
- Falls $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : Ax + By \le b\}$ beschränkt ist, so terminiert der Algorithmus.
- Wenn der Algorithmus terminiert, ist (x^{best}, y^{best}) Optimallösung von (*) (es sei denn, (x^{best}, y^{best}) ist immer noch undefiniert, dann ist (*) unzulässig).
- Zu jedem Zeitpunkt gilt für das Maximum ξ_{max} aller Optimalwerte von LP-Relaxierungen der gerade aktiven Subprobleme: Falls (x^{best}, y^{best}) definiert ist, so gilt für den Wert ω und den Optimalwert OPT von *:

$$\omega \ge \frac{\omega}{\max\{\omega, \xi_{max}\}} \cdot OPT \qquad (\text{sofern } \omega > 0)$$

<u>Bsp.:</u> $\omega = 95$, $\xi_{max} = 100 \Rightarrow$ gefundene Lösung ist mindestens 95% optimal.

- Ohne Überprüfung von $\xi^* > \omega$ in 2(c) nimmt der Algorithmus im Wesentlichen eine pure Enumeration aller möglichen ganzzahligen x vor.
- Je besser (kleiner) ξ^* in 2(b), umso größer ist die Chance, große Teile des Suchraums nicht zu enumerieren.

Branch-and-Cut

- Modifikation von 2(b)
- Falls $x^* \notin \mathbb{Z}^n$, suche eine Ungleichung $\langle \bar{a}, x\rangle + \langle \bar{g}, y\rangle \leq \bar{\beta}$, welche gültig ist für die zulässigen Lösungen

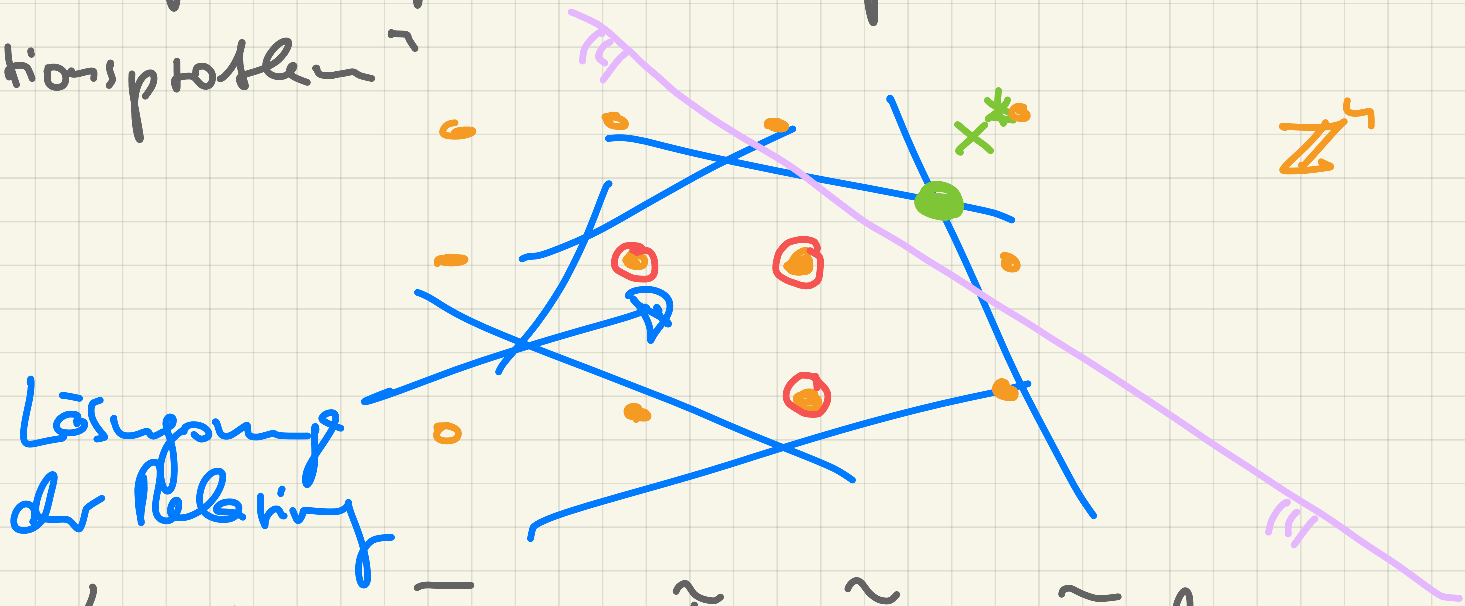
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p : \tilde{A}x + \tilde{G}y \leq b\}$$

von Π mit:

$$\langle \bar{a}, x^*\rangle + \langle \bar{g}, y^*\rangle > \bar{\beta}$$

(geometrisch: eine "Schnittebene", die (x^*, y^*) von der für Π zulässigen Lösung trennt / separiert)

⇝ "Separationsproblem"



- Füge $\langle \bar{a}, x \rangle + \langle \bar{g}, y \rangle \le \bar{\delta}$ zu $\tilde{A}x + \tilde{G}y \le \tilde{b}$ hinzu und löse das LP erneut ⇝ (x^*, y^*) mit hoffentlich kleinerem ξ^*.
- Iteriere das Vorgehen bis
  - $x^* \in \mathbb{Z}^n$
  - keine Schnittebene gefunden und
  - $\xi^* \le \omega$
  - ...

- Zentrale mathematische Aspekte: Analyse des Separationsproblems