IP 25.6.19

Schnittebenen für reine IP's ($p=0$)

Chvátal-Gomory-Schnitte

- Sei x^* eine Ecke von $P^{\leq}(A,b)$, $x^* \notin \mathbb{Z}^n$ (z.B. optimale Eckenlösung der LP-Relaxierung)
- Satz 4.1 $\Rightarrow$ (Die minimale Seite) x^* ist von einer für $P^{\leq}(A,b)$ gültigen Ungleichung $\langle c,x\rangle \leq \delta$ mit $c \in \mathbb{Z}^n$, $\delta \notin \mathbb{Z}$ definiert.
- $\langle c,x\rangle \leq \lfloor \delta \rfloor$ separiert x^* von $\underbrace{P^{\leq}(A,b)}_{P} \cap \mathbb{Z}^n$ (sogar von P')

  $\rightsquigarrow$ "Chvátal-Gomory Schnitt"

Notation:
- Für $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(\alpha) := \alpha - \lfloor \alpha \rfloor$
- Für $v \in \mathbb{R}^n$: $f(v) := (f(v_1), \dots, f(v_n))$

Definition: Ein "fraktionaler Gomory-Schnitt" für $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ist eine Ungleichung $\langle f(a), x\rangle \geq f(\beta)$ wobei $\langle a, x\rangle = \beta$ gültig für P.

Bemerkung: Fraktionale Gomory-Schnitte für $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ sind gültig für P' (und damit $P \cap \mathbb{Z}^n$).

Beweis: Addiere für alle i $f(a_i) \cdot [-x_i \leq 0]$ zu $\langle a, x\rangle = \beta$

$$\rightsquigarrow \quad \langle \lfloor a \rfloor, x\rangle \leq \beta \quad \text{gültig für } P$$

$$\Longrightarrow \quad \langle \lfloor a \rfloor, x\rangle \leq \lfloor \beta \rfloor \quad \text{gültig für } P'$$

Subtraktion der für P (und damit für $P' \subseteq P$) gültigen Gleichung $\langle a, x\rangle = \beta$ liefert, dass

$$\langle -f(a), x\rangle \leq -f(\beta) \quad \text{gültig für } P' \text{ ist.}$$

$\boxtimes$

Separation und fraktionale Gomory-Schnitte

- Sei $B \subseteq [n]$ (optimale) zulässige Basis-Lösung der LP-Relaxierung
  $\max\{\langle c, x\rangle : Ax = b,\ x \geqslant 0_n\}$ (*) (Simplex-Algorithmus)

- Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (und $N := [n] \setminus B$):

$$Ax = b \iff A_{*,B} \cdot x_B + A_{*,N} \cdot x_N = b$$
$$\iff x_B + A_{*,B}^{-1} \cdot A_{*,N} \cdot x_N = A_{*,B}^{-1} \cdot b \quad (**)$$

- x^* mit $x^*_B = A_{*,B}^{-1} b$, $x^*_N = 0_N$ ist zugehörige Basislösung.
- Falls $x^* \notin \mathbb{Z}^n$ gibt es $i \in B$ mit $\beta := (A_{*,B}^{-1} \cdot b)_i \notin \mathbb{Z}$
- Mit $a \in \mathbb{R}^n$, $a_B := e_i$, $a_N := (A_{*,B}^{-1} \cdot A_{*,N})_{i,*}$:

$$\langle a, x\rangle = \beta \text{ gültig für } P_+^=(A,b) \quad (i\text{-te Zeile von } (**))$$

- Also ist $\langle f(a), x \rangle \geq f(\beta)$ ein fraktionaler Gomory-Schnitt für $P_+^=(A,b)$ und

$$\langle f(a), x^* \rangle = \langle \underbrace{f(a_B)}_{0_B}, x_B^* \rangle + \langle \underbrace{f(a_N)}_{0_N}, x_N^* \rangle = 0 < f(\beta)$$

$\beta \notin \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$ Separation gelungen.

Schnittebenen für MIP's

Gomory-Mixed-Integer Schnitte (GMI cuts)

- Herleitung aus einer Gleichung und Nichtnegativitätsbedingungen (wie bei fraktionalen Gomory-Schnitten)

- Für $a \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^p$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ betrachte
$$S := \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p : \langle a, x \rangle + \langle g, y \rangle = \beta, \ x \geq 0_n, \ y \geq 0_p \}$$
- Partitioniere $[n] = N_1 \cup N_2$
- Für alle $(x,y) \in S$ gilt:

$$\sum_{j \in N_1} \underbrace{a_j}_{\lfloor a_j \rfloor + f(a_j)} \cdot x_j + \sum_{j \in N_2} \underbrace{a_j}_{(\lfloor a_j \rfloor + 1) + (f(a_j) - 1)} \cdot x_j + \langle g, y \rangle = \beta$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{j \in N_1} f(a_j) \cdot x_j + \sum_{j \in N_2} (f(a_j) - 1) \cdot x_j}_{\langle \tilde{a}, x \rangle} + \langle g, y \rangle = \beta \underbrace{- \sum_{j \in N_1} \lfloor a_j \rfloor x_j - \sum_{j \in N_2} (\lfloor a_j \rfloor + 1) x_j}_{k(x) \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \tilde{a}, x \rangle + \langle g, y \rangle \geq f(\beta) \qquad \Big| \cdot \frac{1}{f(\beta)} \quad (>0)$$

oder $$\langle \tilde{a}, x \rangle + \langle g, y \rangle \leq f(\beta) - 1 \qquad \Big| \cdot \frac{1}{f(\beta) - 1} \quad (<0)$$

$$\Longrightarrow \sum_{j\in N_1} \frac{f(a_j)}{f(\beta)} x_j + \sum_{j\in N_2} \frac{f(a_j)-1}{f(\beta)} \cdot x_j + \sum_{j\in[p]} \frac{g_j}{f(\beta)} \cdot y_j \geq 1$$

IV IΛ

IV } falls $g_j \geq 0$

IΛ } falls $g_j < 0$

oder $$\sum_{j\in N_1} \frac{f(a_j)}{f(\beta)-1} \cdot x_j + \sum_{j\in N_2} \frac{f(a_j)-1}{f(\beta)-1} \cdot x_j + \sum_{j\in[p]} \frac{g_j}{f(\beta)-1} \cdot y_j \geq 1$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sum_{j\in N_1} \frac{f(a_j)}{f(\beta)} \cdot x_j + \sum_{j\in N_2} \frac{1-f(a_j)}{1-f(\beta)} \cdot x_j}_{\langle \bar{a}, x\rangle} + \underbrace{\sum_{j\in[p]:\, g_j\geq 0} \frac{g_j}{f(\beta)} y_j + \sum_{j\in[p]:\, g_j<0} \frac{g_j}{f(\beta)-1} y_j}_{\langle \bar{g}, y\rangle} \geq 1$$

<u>Definition:</u> Für $a \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^p$, $\beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\langle \bar{a}, x \rangle + \langle \bar{g}, y \rangle \geq 1$$

mit

$$N_1 := \{ j \in [n] : f(a_j) \leq f(\beta) \}$$

$$N_2 := \{ j \in [n] : f(a_j) > f(\beta) \}$$

der von (a, g, β) (oder $\langle a, x \rangle + \langle g, y \rangle = \beta$) induzierte <u>GMI-Schnitt</u>.