$\boxed{\text{IP 2.7.19}}$

<u>Bemerkungen:</u> • Die Wahl von N_1 (und N_2) in der Definition des GMI-cuts ist so getroffen, dass die Ungleichung auf $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^p_+$ so stark wie möglich ist (d.h. die Koeffizienten so klein wie möglich sind).

• Ist $\langle a, x\rangle + \langle g, y\rangle = f$ die zur Basis-Variablen x_i gehörende Zeile im (optimalen) Simplex-Tableau der LP-Relaxierung und $x_i^* = f \notin \mathbb{Z}$ für die zugehörige Basis-Lösung (x^*, y^*), so ist

$$\langle \bar{a}, x^*\rangle + \langle \bar{g}, y^*\rangle = 0 < 1$$

(x^*, y^*) = Nullvektor auf Nicht-Basis

g = ——— kont. Teil der Basis

a = 0/1-Vektor auf ganz. ———

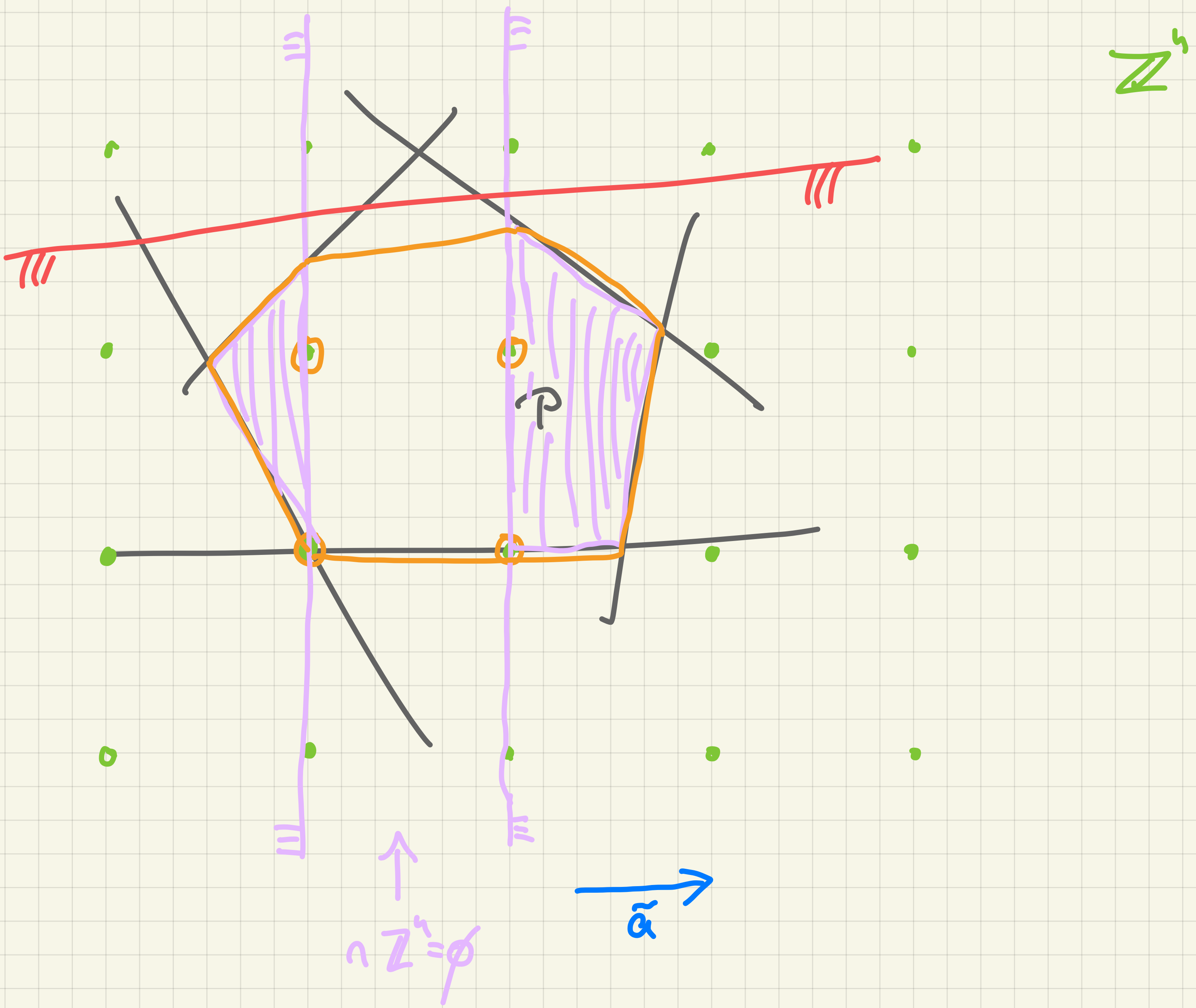
⇝ Aus Tableau kann man also direkt GMI-Ungleichung ablesen, sofern Lösung nicht gemischt-ganzzahlig.

- Für $p > 0$ (keines $|p|$):

$$\sum_{j \in N_1} \frac{f(a_j)}{f(\beta)} \cdot x_j + \sum_{j \in N_2} \frac{1 - f(a_j)}{1 - f(\beta)} \cdot x_j \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{j \in N_1} f(a_j) \cdot x_j + \sum_{j \in N_2} \boxed{\frac{1 - f(a_j)}{1 - f(\beta)} \cdot f(\beta)} \cdot x_j \geq f(\beta)$$

$f(a_j) > f(\beta)$ $\quad < f(\beta) < f(a_j)$



$\mathbb{Z}^4$
P
$\cap \mathbb{Z}^4 = \emptyset$
$\tilde{a}$

Definition: Eine **wohldefinierte Familie von Polyedern** besteht aus einer Teilmenge $W \subseteq \underbrace{\{0,1\}^*}_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{0,1\}^k}$, einem Polynom q

und einer Abbildung, die jedem $w \in W$ ein Paar $(P(w), n(w))$ zuordnet und:

- Für alle $w \in \{0,1\}^*$ kann in $q(\underbrace{|w|}_{\text{Länge von } w})$ Zeit entschieden werden, ob $w \in W$ ist.
- Für alle $w \in W$ ist $n := n(w) \in \mathbb{N}$ und es gibt $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $P(w) = P^{\leq}(A,b)$ und $k(A,b) \leq q(|w|)$.

Beispiele für Familien vollkodierter Polyeder

- $\operatorname{conv}\{\chi(M) : M \subseteq E \text{ Matching}\}$ $\quad (G=(V,E) \text{ Graph})$

  $\rightsquigarrow$ Matching-Polytope

- $\operatorname{conv}\{\chi(H) : H \subseteq E \text{ Hamilton-Kreis}\}$ $\quad (G=(V,E) \text{ vollständiger Graph})$

  $\rightsquigarrow$ Traveling Salesman Polytope

- $\operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n : \langle a,x\rangle \leq \beta\}$ $\quad (a \in \mathbb{N}^n, \beta \in \mathbb{N})$

  $\rightsquigarrow$ Knapsack-Polytope

- $P^{\leq}(A,b)$ $\quad (A \in \mathbb{Q}^{m \times n}, b \in \mathbb{Q}^m)$

- $\operatorname{conv}(X) + \operatorname{ccone}(Y)$ $\quad (X, Y \subseteq \mathbb{Q}^n, |X|, |Y| < \infty)$

- P_I $\quad$ (wie die beiden oben)

<u>Satz 7.1</u> [Grötschel, Lovász, Schrijver 1979 /
Padberg, Rao 1979 /
Khachiyan 1979]

kann man für eine wohldefinierte Familie von Polyedern
Optimierungsproblem
das Separationsproblem in polynomialer Zeit lösen,
Separationsproblem
so kann man für sie auch das Optimierungsproblem
in polynomialer Zeit lösen.

$\rightsquigarrow$ Äquivalenz von Optimieren und Separieren