Prof. Dr. Volker Kaibel

Otto-von-Guericke U MD

Sommersemester 2019

Ganzzahlige Lineare Optimierung

1. Übungsblatt

Besprechung: Dienstag, 16. April

Aufgabe 1

Eine SAT-Formel (*SAT=Satisfiability*) ist ein Boolescher Term in konjunktiver Normalform (KNF), also beispielsweise ein Ausdruck der Form

$$(b_3 \vee \neg b_4 \vee b_5) \wedge (\neg b_2 \vee \neg b3 \vee \neg b_4) \wedge (b_1 \vee b_2)\,.$$

Allgemein besteht eine KNF-Formel aus einer Menge von (endlich vielen) *Klauseln*, und jede Klausel ist eine Disjunktion von (endlich vielen) *Literalen*, wobei ein Literal eine Boolesche Variable oder ihre Negation ist. Geben Sie eine IP-Formulierung für das *MAXSAT*-Problem an, das danach fragt, für eine gegebene KNF-Formel eine Belegung der Booleschen Variablen mit `wahr` und `falsch` zu finden, so dass möglichst viele Klauseln (bei Auswertung nach den üblichen logischen Regeln) `wahr` werden.

Aufgabe 2

Eine *Euler-Tour* in einem (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $(e_0, \ldots, e_{\ell-1})$ von Kanten in G (Wiederholungen sind erlaubt), die einen geschlossenen Pfad ergibt (d.h., für alle $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$ gilt $|e_i \cap e_{(i+1 \mod \ell)}| = 1$), der jeden Knoten wenigstens einmal besucht (d.h. $e_0 \cup \cdots \cup e_{\ell-1} = V$). Geben Sie ein IP an, mit dem man in einem gegebenen Graphen die Kantenmenge (d.h. die Reihenfolge muss nicht bestimmt werden) einer Euler-Tour möglichst geringer Länge ℓ bestimmen kann. (Hinweis: Eine Kantenteilmenge ist genau dann die Kantenteilmenge einer Euler-Tour, wenn sie auf V einen zusammenhängenden Graphen erzeugt und jeder Knoten in $2, 4, 6, \ldots$ der Kanten enthalten ist).

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass $\langle \det A \rangle$ polynomial beschränkt in $\langle A \rangle$ für jede Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ ist. (Hinweis: Überlegen Sie, dass es genügt, die Aussage für ganzzahlige Matrizen zu zeigen, und schätzen Sie eine Summe von Produkten mittels eines Produkts von Summen ab.) Schaffen Sie sogar, $\langle \det A \rangle \leq 2\langle A \rangle$ zu zeigen?

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass für reguläre Matrizen $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die folgenden Aussagen paarweise äquivalent sind:

1. U ist unimodular (d.h., $|\det(U)| = 1$).
2. U^{-1} ist unimodular.
3. $U^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$
4. $\Lambda(U) = \mathbb{Z}^n$