Prof. Dr. Volker Kaibel
Otto-von-Guericke U MD
Sommersemester 2019

Ganzzahlige Lineare Optimierung
2. Übungsblatt

Besprechung: Dienstag, 28. Mai

Aufgabe 1
Zeigen Sie die noch zu beweisende Implikation in der Charakterisierung von GHOUILA-HOURI (Satz 3.4): Ist $A \in \{-1,0,1\}^{m\times n}$ total unimodular, so gibt es für jede Teilmenge $J \subseteq [n]$ eine Partitionierung $J = J_+ \uplus J_-$ ($J_+ \cap J_- = \varnothing$) mit $\sum_{j\in J_+} A_{\star,j} - \sum_{j\in J_-} A_{\star,j} \in \{-1,0,1\}^m$. (Hinweis: Überlegen Sie, dass es genügt, die Aussage für $J = [n]$ zu beweisen und zeigen Sie dann

$$\{x \in \{0,1\} \mid \lfloor \tfrac{1}{2} A \cdot \mathbb{1} \rfloor \le Ax \le \lceil \tfrac{1}{2} A \cdot \mathbb{1} \rceil\} \neq \varnothing\,.)$$

Aufgabe 2
Sei $D = (V, A)$ mit $A \subseteq V \times V$ ein gerichteter Graph und $T \subseteq V \times V$ eine Menge von Bögen (nicht notwendigerweise aus A), die als ungerichtete Kanten aufgefasst einen aufspannenden Baum auf V bilden. Für jeden Bogen $a \in A$ sei P_a der Weg im Baum T vom Anfangsknoten von a zum Endknoten von a. Eine Matrix $N \in \{-1,0,1\}^{T\times A}$ mit

$$N_{(t,a)} = \begin{cases} +1 & \text{falls } P_a \text{ den Bogen } t \text{ entlang seiner Richtung benutzt} \\ -1 & \text{falls } P_a \text{ den Bogen } t \text{ entgegen seiner Richtung benutzt} \\ 0 & \text{falls } P_a \text{ den Bogen } t \text{ gar nicht benutzt} \end{cases}$$

heißt eine *Netzwerkmatrix*. Zeigen Sie, dass Netzwerkmatrizen total unimodular sind.

Aufgabe 3
Intervallmatrizen sind Matrizen $M \in \{0,1\}^{m\times n}$, deren sämtliche Zeilen die Form

$$(0,\dots,0,1\dots,1,0\dots,0)$$

haben (d.h. es gibt keine $i \in [m]$, $j_1, j_2, j_3 \in [n]$ mit $j_1 < j_2 < j_3$ und $M_{i,j_1} = 1$, $M_{i,j_2} = 0$, $M_{i,j_3} = 1$), sowie die Transponierten solcher Matrizen. Zeigen Sie, dass alle Intervallmatrizen total unimodular sind.

Aufgabe 4
Sei $M \in \{0,1\}^{11\times 9}$ die Elemente-Mengen Inzidenzmatrix des Mengensystems $\mathcal{S}$ in Abbildung 1 (auf der folgenden Seite), d.h.

$$M_{iU} = \begin{cases} 1 & i \in U \\ 0 & i \notin U \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{a,\dots,\ell\}, U \in \{A,\dots,J\}.$$

Zeigen Sie, dass M total unimodular ist. Verallgemeinern Sie die Aussage auf eine geeignete Klasse von Teilmengensystemen.

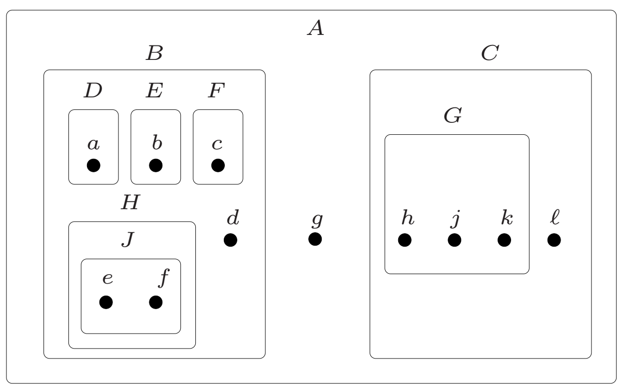

Abbildung 1: Das Mengensystem in Aufgabe 1. Die schwarzen Punkte (a–ℓ) repräsentieren die Elemente, die Rechtecke (A–J) die Mengen.