Prof. Dr. Volker Kaibel

Otto-von-Guericke U MD
Sommersemester 2019

Ganzzahlige Lineare Optimierung
3. Übungsblatt

Besprechung: Dienstag, 2. Juli

Aufgabe 1. Seien $k \in \{1, 2, \dots\}$ und $P = \operatorname{conv}\{(0,0), (0,1), (k, \frac{1}{2})\}$. Zeigen Sie, dass $P_I \subsetneq P^{(t)}$ für alle $t < k$ gilt. (*Hinweis*: Zeigen (und benutzen) Sie $(k-1, \frac{1}{2}) \in P'$.)

Aufgabe 2. Eine *stabile Menge* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenteilmenge $S \subseteq V$ mit $\{v, w\} \notin E$ für alle $v, w \in S$. Für das Polytop

$$P(G) = \{x \in \mathbb{R}^V \mid \mathbb{O}_V \leq x \leq \mathbb{1}_V, x_v + x_w \leq 1 \text{ für alle } \{v, w\} \in E\}$$

ist dann $P(G)_I = \operatorname{conv}\{\chi(S) \in \{0,1\}^V \mid S \subseteq V \text{ stabile Menge in } G\}$ das *stabile-Mengen Polytop von* G. Bestimmen Sie (mit Beweisen) für den Kreis C_5 mit fünf Knoten

$$\max\{\langle \mathbb{1}, x\rangle \mid x \in P(C_5)\} \quad \text{und} \quad \max\{\langle \mathbb{1}, x\rangle \mid x \in P(C_5)'\}.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ und für jede *Clique* $K \subseteq V$ in G (d.h. $\{v, w\} \in E$ für alle $v, w \in K$, $v \neq w$) und für das in Aufgabe 3 definierte Polytop $P(G)$ die Ungleichung $\sum_{v \in K} x_v \leq 1$ gültig für $P(G)^{(t-2)}$ ist, wobei $t = |K| \geq 2$ sei.

Aufgabe 4. Geben Sie einen Algorithmus an, der zu mittels rationaler Ungleichungsbeschreibungen gegebenen Polytopen $P_1, \dots, P_r \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x^\star \in \mathbb{Q}^n$ in polynomial beschränkter Zeit entscheidet, ob $x^\star \in \operatorname{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_r)$ ist, und falls das nicht der Fall ist, $a \in \mathbb{Q}^n$ und $\beta \in \mathbb{Q}$ bestimmt, so dass $\langle a, x\rangle \leq \beta$ gültig für $\operatorname{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_r)$ ist, aber $\langle a, x^\star\rangle > \beta$ gilt.
(Hinweis: Charakterisieren Sie die für $\operatorname{conv}(P_1 \cup \dots \cup P_r)$ gültigen Ungleichungen mit Hilfe der starken LP-Dualität.)

Aufgabe 5. Benutzen Sie den in Aufgabe 3 zu konstruierenden Algorithmus (für $r = 2$), um für eine Ecke $x^\star$ eines mittels rationaler Ungleichungen gegebenen Polytops $P \subseteq [0,1]^n$ das Separationsproblem über P_I zu lösen.

Aufgabe 6. Sei P_n das *Traveling Salesman Polytop*, also die konvexe Hülle aller charakteristischen Vektoren von Hamilton-Kreisen (Kreise, die jeden Knoten genau einmal besuchen) im vollständigen Graphen auf n Knoten. Seien $T_1, \dots, T_s$ ($s \geq 3$ ungerade) paarweise disjunkte Knotenmengen und H eine Knotenmenge, so dass $H \cap T_i \neq \varnothing$ und $T_i \setminus H \neq \varnothing$ für alle i gilt. Zeigen Sie, dass die *Kamm-Ungleichung*

$$x(\delta(H)) + \sum_{i=1}^{s} x(\delta(T_i)) \geq 3s + 1$$

gültig für P_n ist. (Diese Ungleichungen liefern in der Praxis wichtige Schnittebenen.)