MOD 5.4.19

[1]

- $[n] := \{1,2,\dots,n\}$, $[n]_0 := \{0,1,2,\dots,n\}$
- $\mathbb{N} := \{0,1,2,\dots\}$, $\mathbb{R}_+ := \{t\in\mathbb{R} : t\geq 0\}$ etc.
- Für $a,b\in\mathbb{R}^m$: $a\leq b \;:\Longleftrightarrow\; a_i\leq b_i \;\; \forall i\in[m]$

  Insbesondere : $Ax\leq b$: $\langle A_{i,*}, x\rangle \leq b_i \;\; \forall i\in[m]$

  i-te Zeile von A

- $\langle y,x\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = y^T x$ (kanonisches / Euklidisches Skalarprodukt)

  D.h. $Ax\leq b \iff \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \leq b_i \;\; \forall i\in[m]$

  ("Nebenbedingungen", "constraints")

Weitere Formulierungsmöglichkeiten

- "$\geq$" oder "$=$" in manchen Nebenbedingungen

$$\left[\alpha \geq \beta \iff -\alpha \leq -\beta \quad , \quad \alpha = \beta \iff \alpha \leq \beta \text{ und } \alpha \geq \beta\right]$$

- "min" statt "max"

$$\left[\min\{\langle c,x\rangle : x \in X\} = -\max\{\langle -c,x\rangle : x \in X\}\right]$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned} \max\ & \langle c,x\rangle \\ \text{s.t.}\ & Ax \leq b \\ & x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

"subject to"

Existenz der Optimallösung:

- Muss nicht existieren
- Falls $\sup \{ \langle c, x \rangle : x \in X \} = +\infty$ (Maximierung)
  $\inf \{ \langle c, x \rangle : x \in X \} = -\infty$ (Minimierung)

  "Problem unbeschränkt"
- Falls $X = \emptyset$: "Problem unzulässig"
- In unserem Setup: Falls weder unzulässig und unbeschränkt, dann wird Max. bzw. Min. angenommen.

  (nicht trivial!)

[2] Modellierung als LP

Variablen: $x_B, x_R \in \mathbb{R}$: Mengen (in Tonnen) an Bändern bzw. Rollen, die produziert werden sollen.

Lineares Optimierungsproblem (LP)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 20 \cdot x_B + 30 \cdot x_R \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{200} x_B + \frac{1}{140} \cdot x_R \leq 40 \\
& x_B \leq 6000 \\
& x_R \leq 4000 \\
& x_B \geq 0 \\
& x_R \geq 0
\end{aligned}
$$

[3] Graphisches Lösungsverfahren für das obige Modell

$\max \; 20x_B + 30x_R$