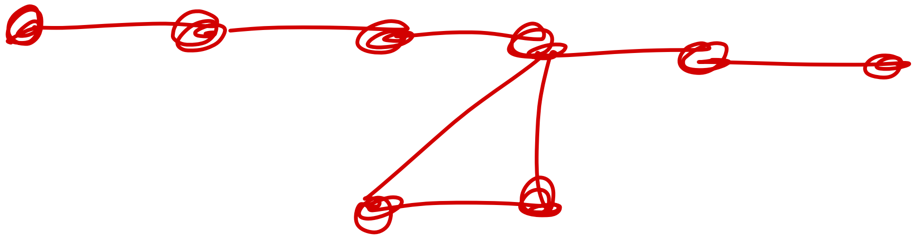
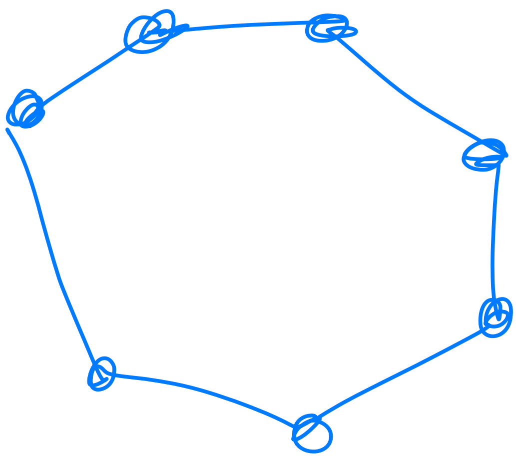
MOD 7.5.19

[15]

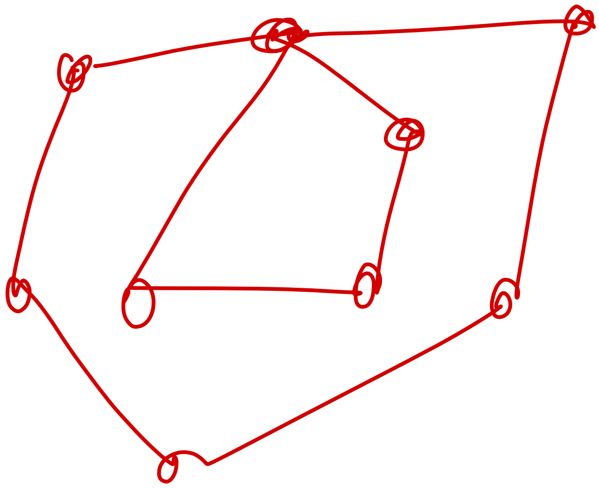
Weg



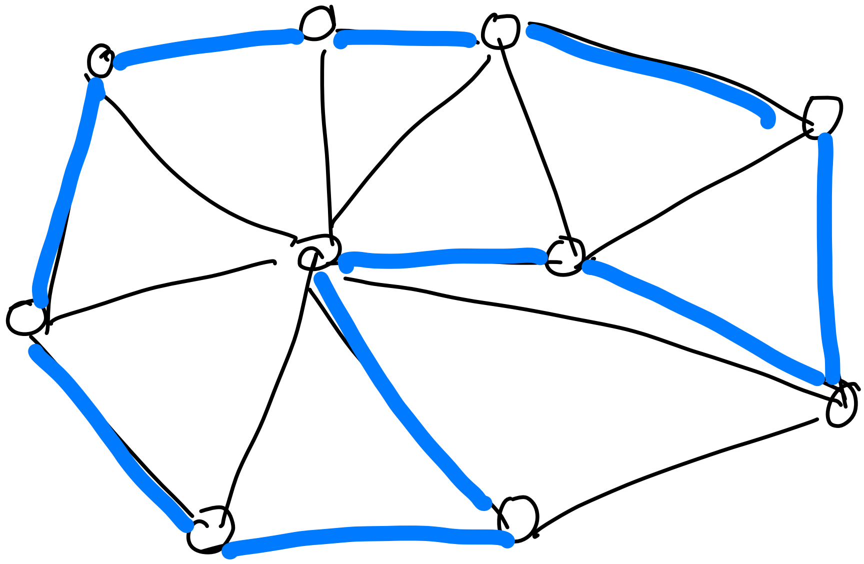
kein Weg



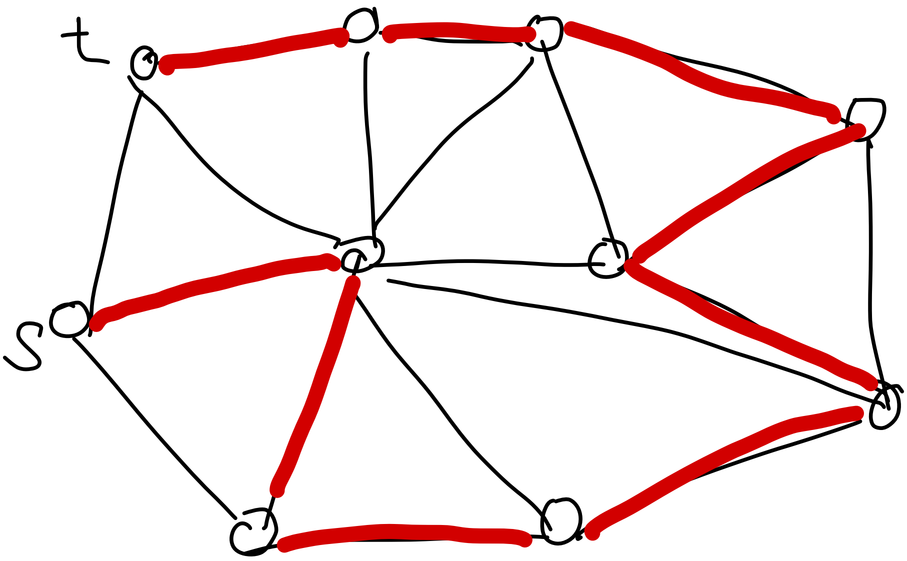
Kreis



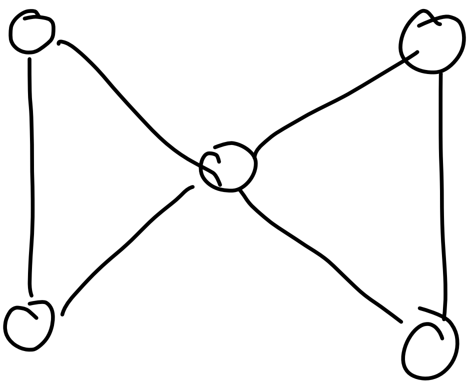
kein Kreis



Hamiltonscher Kreis in G

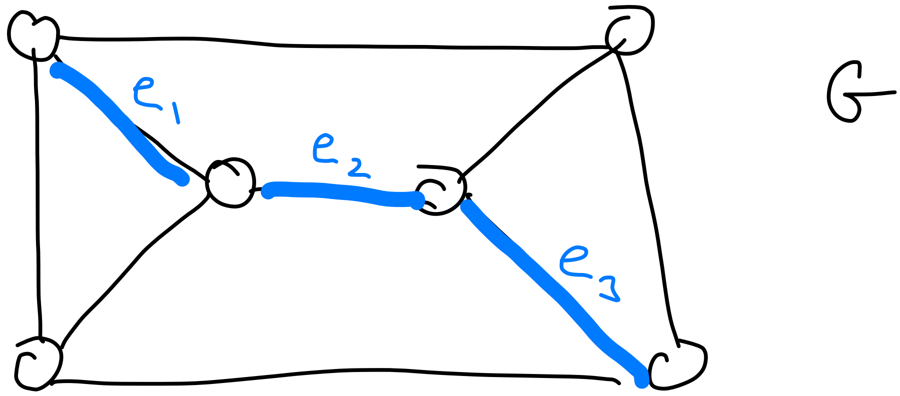


Hamiltonscher s-t-Weg in G



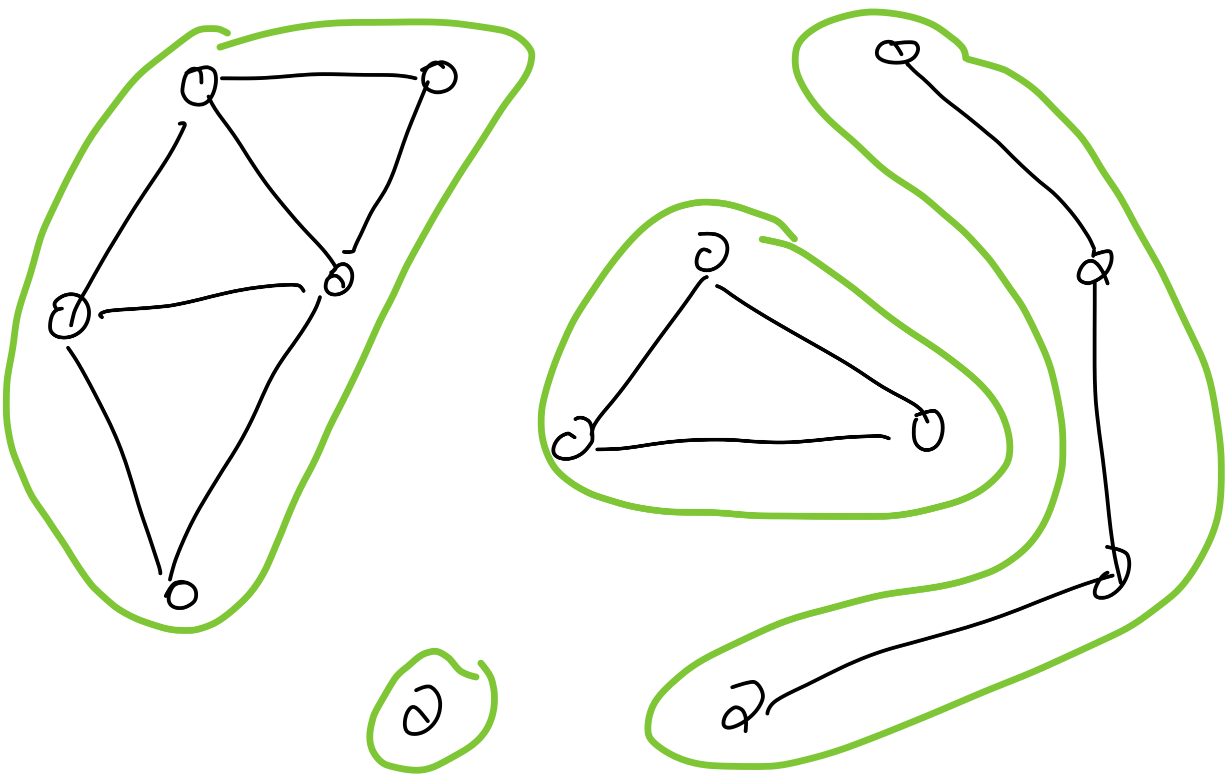
enthält keinen Hamilton-Kreis

[16]



$\{e_1, e_2, e_3\}$ ist ein Weg in G

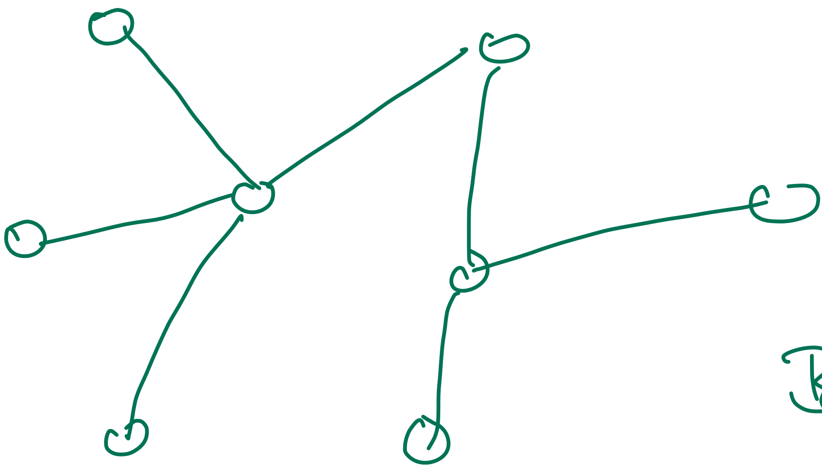
[17]



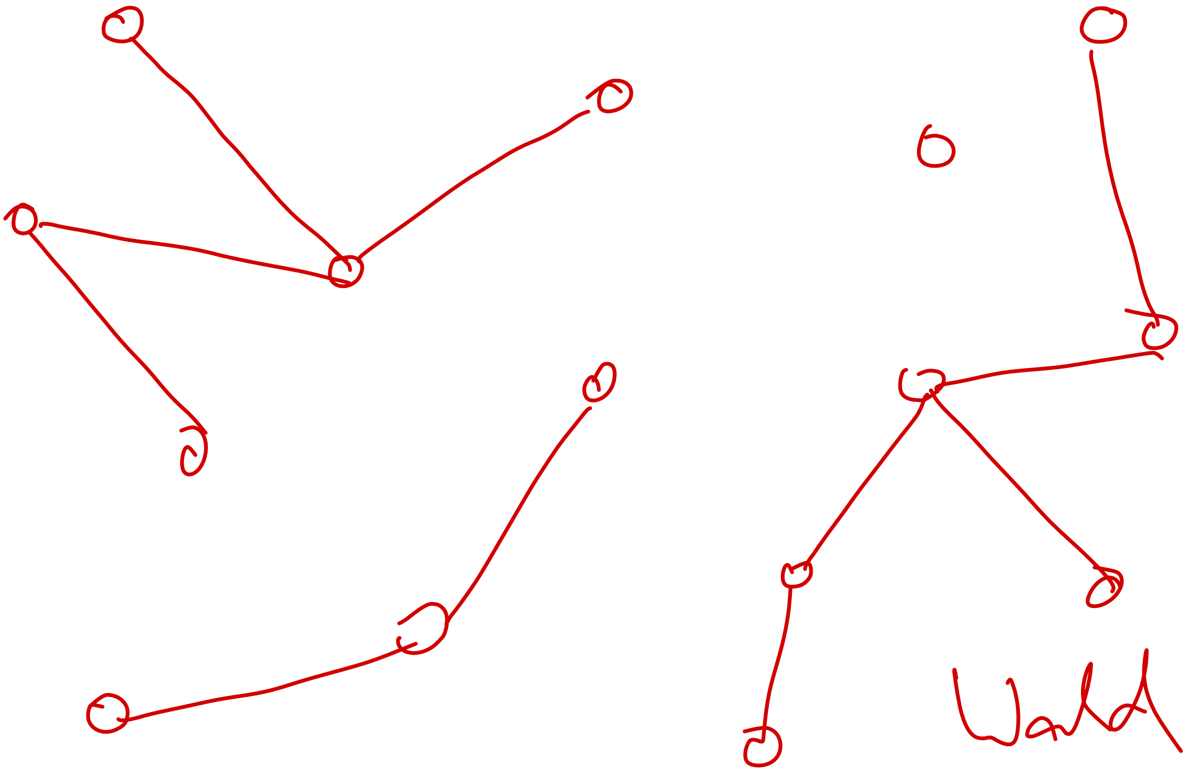
G: nicht zusammenhängend

4 Zusammenhangkomponenten

[18]



Baum



Wald

[19] <u>Begründung:</u>

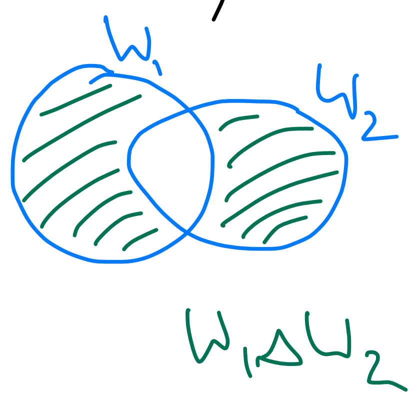
Wähle unter den Wegen in G einen inklusions-maximalen (d.h. es gibt keinen anderen Weg, der ihn enthält); wegen $E(G) \neq \emptyset$ ist dieser Weg nicht leer. Seine beiden Endknoten müssen wegen der Kreisfreiheit von G beide Grad 1 haben, da man sonst den Weg um eine Kante verlängern könnte.

[20] Beweis zu Satz 1

"1. ⇒ 2.": Es gelte 1. ("G ist ein Baum");
um 2. zu zeigen seien $s,t \in V(G)$, $s \neq t$.
Da G als Baum zusammenhängend ist, gibt es mindestens einen s-t-Weg in G.
Sind $W_1, W_2 \subseteq E(G)$ s-t-Wege, so hat im Untergraphen $H := (V(G), W_1 \triangle W_2)$

$$\left(W_1 \triangle W_2 := (W_1 \setminus W_2) \cup (W_2 \setminus W_1) = (W_1 \cup W_2) \setminus (W_1 \cap W_2) \right.$$

"symmetrische Differenz")



jeder Knoten geraden Grad

[denn: mit

$H_i := (V(G), W_i)$ $(i=1,2)$ gilt für alle $v \in V(G)$:

$$\deg_{H_1}(v) \equiv \deg_{H_2}(v) \mod 2 \qquad (*)$$

$$\deg_H(v) \equiv \deg_{H_1}(v) + \deg_{H_2}(v) \mod 2 \quad (**)$$

$$\deg_H(v) = |\delta_H(v)|, \qquad \deg_{H_1}(v) = |\delta_{H_1}(v)|, \qquad \deg_{H_2}(v) = |\delta_{H_2}(v)|$$

$$\underbrace{|\delta_H(v)|}_{=\,|\delta_{H_1}(v) \,\triangle\, \delta_{H_2}(v)|}$$

$$|\delta_{H_1}(v) \,\triangle\, \delta_{H_2}(v)|$$

$$= \left|\left(\delta_{H_1}(v) \cup \delta_{H_2}(v)\right) \setminus \left(\delta_{H_1}(v) \cap \delta_{H_2}(v)\right)\right|$$

$$= \boxed{|\delta_{H_1}(v) \cup \delta_{H_2}(v)|} - |\delta_{H_1}(v) \cap \delta_{H_2}(v)|$$

$$= |\delta_{H_1}(v)| + |\delta_{H_2}(v)| - |\delta_{H_1}(v) \cap \delta_{H_2}(v)|$$

$$- |\delta_{H_1}(v) \cap \delta_{H_2}(v)|$$

$$= |\delta_{H_1}(v)| + |\delta_{H_2}(v)| - \underbrace{2 \cdot |\delta_{H_1}(v) \cap \delta_{H_2}(v)|}_{\equiv\, 0 \mod 2}$$

$$\equiv |\delta_{H_1}(v)| + |\delta_{H_2}(v)| \mod 2$$

$(*), (**) \Rightarrow \deg_H(v) \equiv 0 \mod 2$]

G ist als Baum azyklisch, also ist auch ein Untergraph H azyklisch. H hat aber nur Knoten mit geradem Grad, insbesondere also keinen Knoten vom Grad Eins. Wegen der vorangegangenen Bemerkung im Latex-Skript hat H also keine Kante, also

$\emptyset = W_1 \triangle W_2 = (W_1 \cup W_2) \setminus (W_1 \cap W_2)$

$\Rightarrow W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow W_1 = W_2$.