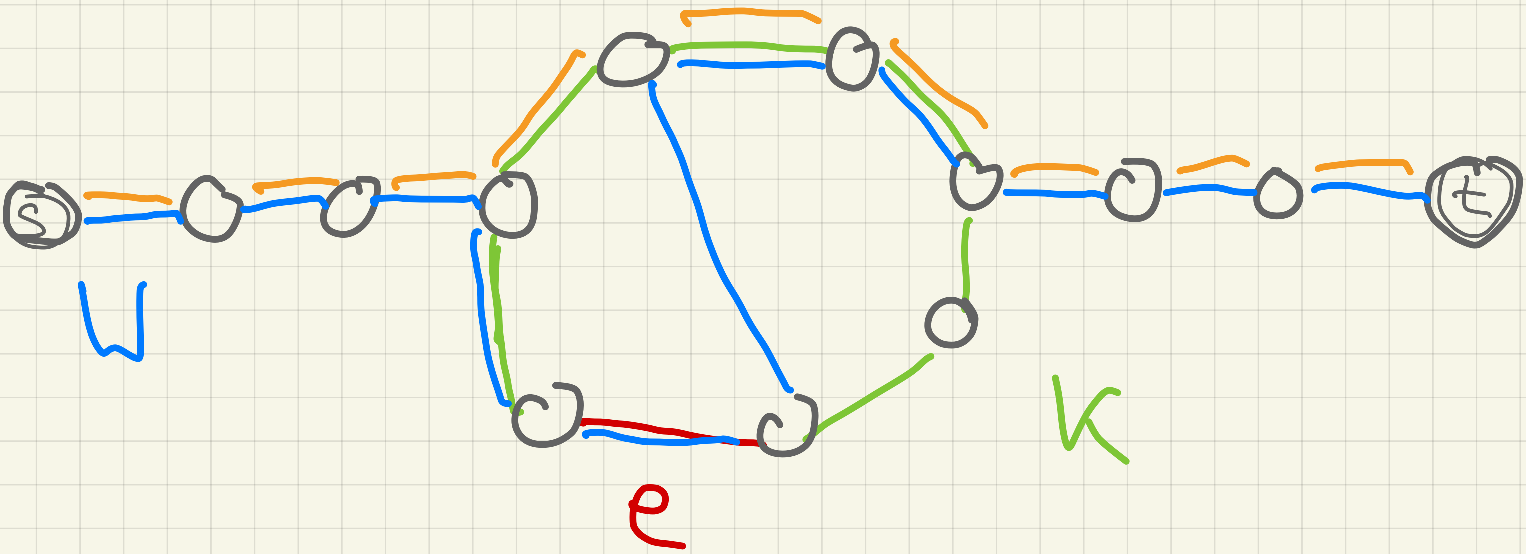
MOD 10.5.19

(Fortsetzung des Beweises zu Satz 1)

"2. ⇒ 3.": Es gelte 2. für G. Offenbar ist G zusammenhängend. Für $e = vw \in E(G)$ gibt es in $E(G) \setminus \{e\}$ keinen v-w-Weg (da e schon der eindeutige v-w-Weg in G ist). Also $(V(G), E(G) \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

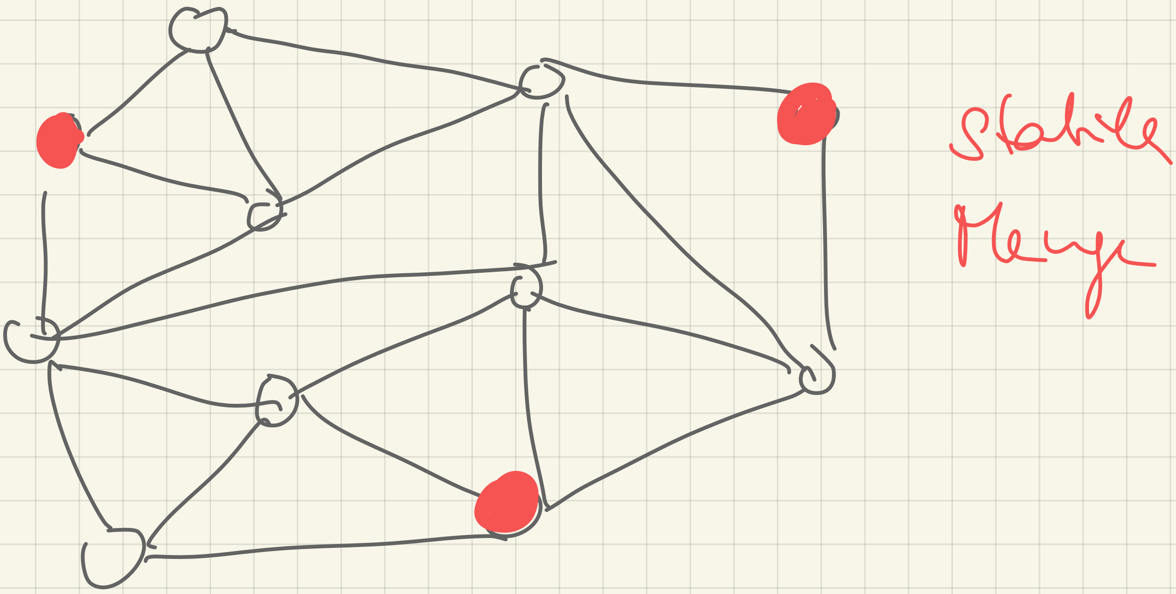
"3. ⇒ 4.": Es gelte 3. für G. Hätte G einen Kreis $K \subseteq E(G)$, so wäre für eine beliebige Kante $e \in K$ der Untergraph $(V(G), E(G) \setminus \{e\})$ zusammenhängend, da für jeden s-t-Weg W, der e benutzt, $W \setminus \{e\} \cup (K \setminus \{e\})$ einen s-t-Weg enthält.

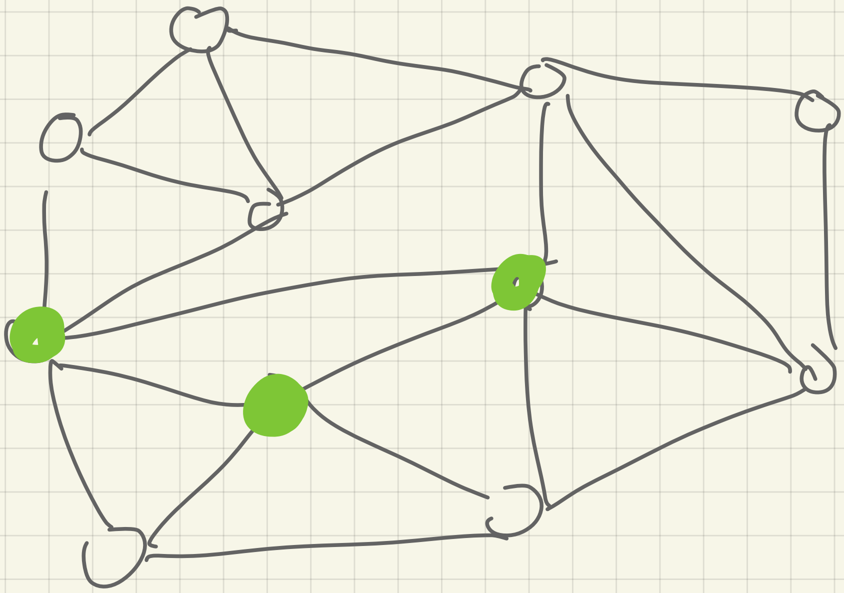


Ist $\bar{e} = vw \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$, so sei $W \subseteq E(G)$ ein v-w-Weg in G. Dann ist $W \cup \{\bar{e}\}$ ein Kreis in $(V(G), E(G) \cup \{\bar{e}\})$.

<u>„4. ⇒ 1.“</u>: Es gelte 4.
Es genügt, zu zeigen, dass G zusammenhängend ist. Seien dann $s, t \in V(G)$, $s \neq t$. Ist $st \in E(G)$, so bildet st einen s-t-Weg in G. Andernfalls sei $K \subseteq E(G) \cup \{st\}$ ein Kreis. Da G azyklisch ist, gilt $st \in K$. Dann ist also $K \setminus \{st\} \subseteq E(G)$ ein s-t-Weg. ∎

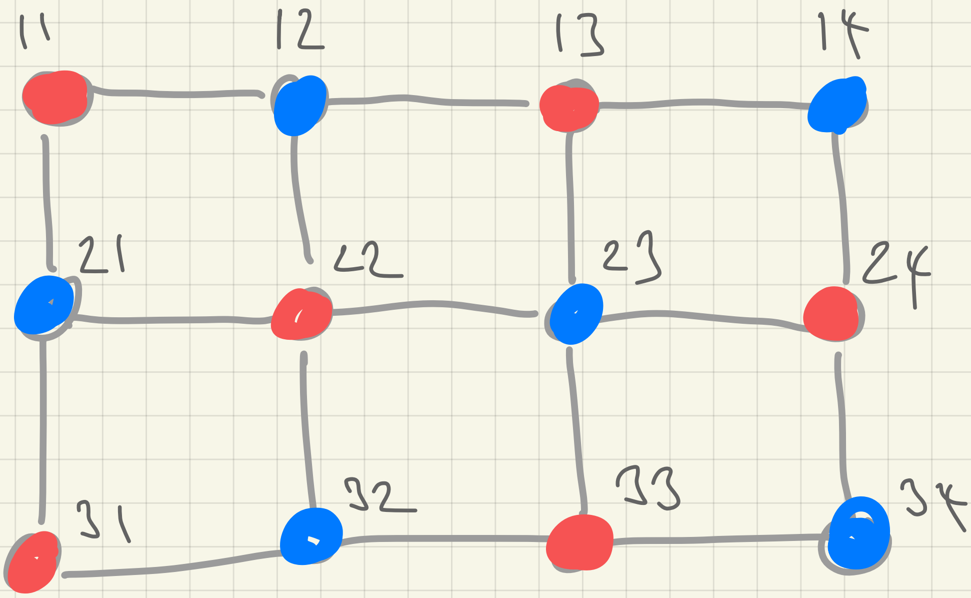
[21]

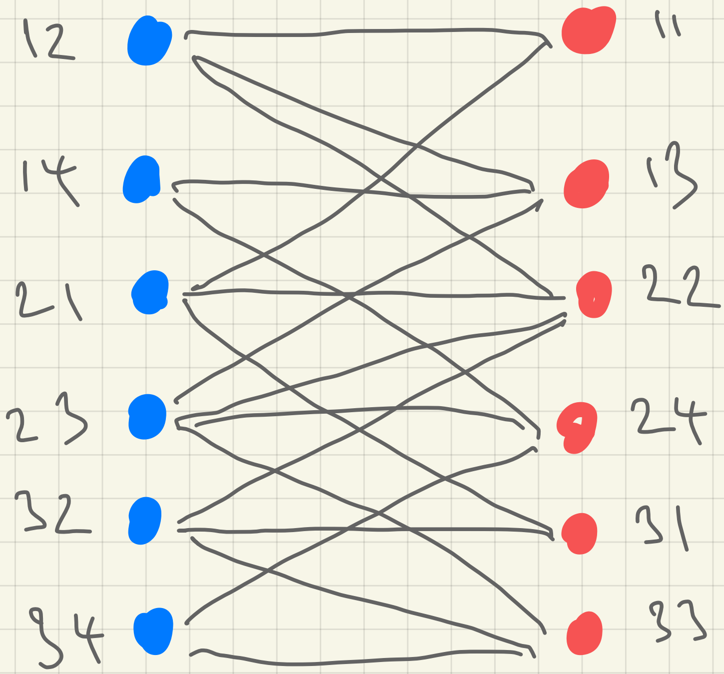




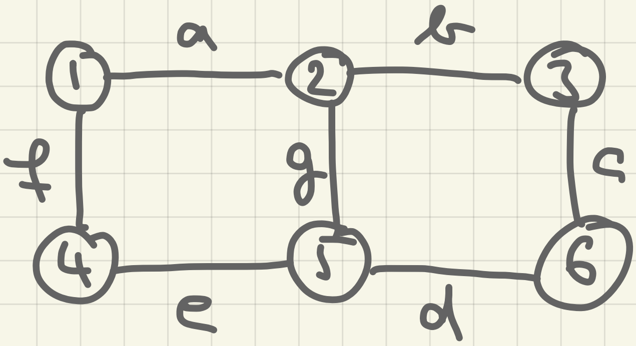
Clique

[22]





[23]



	a	b	c	d	e	f	g
1	1	0	0	0	0	1	0
2	1	1	0	0	0	0	1
3	0	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1	0	1
6	0	0	1	1	0	0	0

[24] Beweis zu Satz 4

Seien $G_1, \dots, G_t$ die Zusammenhangskomponenten von G. Dann hat bei geeigneter Sortierung der Knoten und Kanten $\mathrm{Inz}(G)$ folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & E(G_1) & E(G_2) & \cdots & E(G_t) \\
\hline
V(G_1) & \mathrm{Inz}(G_1) & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
V(G_2) & 0 & \mathrm{Inz}(G_2) & \cdots & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
V(G_t) & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Inz}(G_t) \\
\hline
\end{array}
$$

Dann ist $\mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G)) = \sum_{j=1}^{t} \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G_j))$

Daher genügt es, für zusammenhängende Graphen G zu zeigen:

$$
(*) \quad \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G)) \overset{!}{=} \begin{cases} |V(G)| - 1, & \text{falls } G \text{ bipartit} \\ |V(G)|, & \text{sonst} \end{cases}
$$

Es gilt "$\leq$", da für bipartite Graphen G mit Bipartition $V(G) = V_1 \cup V_2$ die Summe der zu V_1 gehörenden Zeilen gleich der Summe der zu V_2 gehörenden Zeilen (nämlich $\mathbb{1}^T$) ist. Also sind die Zeilen linear abhängig.

Um "$\geq$" in (*) zu zeigen, zeigen wir zunächst:

(**) Ist G' Untergraph des zusammenhängenden Graphen G, so gilt

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G)) \geq \operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G')) + |V(G) \setminus V(G')|$$