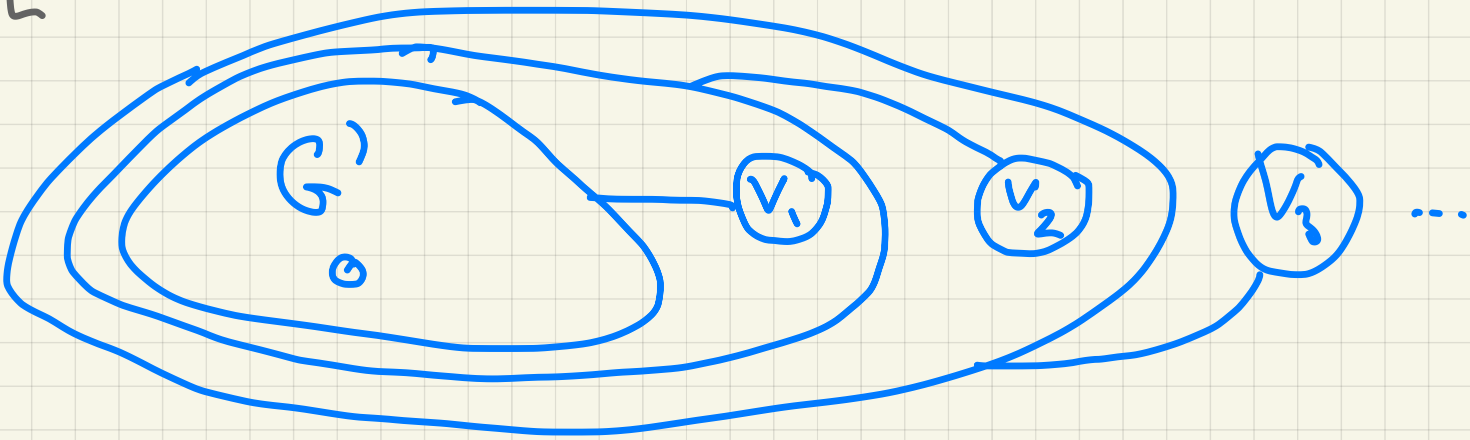
MaD 17.5.19

mit $V(G') \neq \emptyset$

(**) Ist G' Untergraph des zusammenhängenden Graphen G, so gilt

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Int}(G)) \geq \operatorname{rang}(\operatorname{Int}(G')) + |V(G) \setminus V(G')|$$

[Denn:



Da G zusammenhängend ist, gibt es eine Reihenfolge

$$v_1, v_2, \dots, v_k$$

der Knoten in $V(G) \setminus V(G')$, so dass für jedes $i \in [k]$ eine Kante $e_i = v_i w_i$ mit $w_i \in V(G') \cup \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ existiert.

Dann hat der Untergraph

$$H := \left(V(G),\ E(G') \cup \{e_1, \dots, e_k\} \right)$$

folgende Inzidenzmatrix:

$$\mathrm{Inz}(H) = \begin{array}{|c|cccc|l}
\multicolumn{1}{c}{\overbrace{\qquad\quad}^{E(G')}} & e_1 & e_2 & \cdots & \multicolumn{1}{c}{e_k} & \\
\hline
\mathrm{Inz}(G') & & & & & \Big\} V(G') \\
\hline
 & 1 & & & & v_1 \\
0 & & 1 & & & v_2 \\
 & & 0 & \ddots & & \vdots \\
 & & & & 1 & v_k \\
\hline
\end{array}$$

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G)) \geq \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(H))$$

$$= \mathrm{rang}(\mathrm{Inz}(G')) + \underbrace{k}_{|V(G) \setminus V(G')|}$$

]

Für $\underline{\text{jeden}}$ zusammenhängenden Graphen G ist also mit $G' := (\{v^*\}, \emptyset)$ für beliebiges $v^* \in V(G)$:

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G)) \geq 0 + (|V(G)|-1) .$$

Das zeigt "$\geq$" für bipartite Graphen.

Ist G $\underline{\text{nicht}}$ bipartit, so gibt es nach Satz 3 einen Kreis G' in G mit $|V(G')| = 2r+1$ $(r \in \{1,2,..\})$

Es gilt:

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Inz}(G')) = \operatorname{rang} \left.\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{2r+1}\right\}2r+1$$

$$= 2r+1 ,$$

denn $\det(\operatorname{Inz}(G')) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 1$

$$+ (-1)^{1+2r+1} \cdot 1 \cdot 1$$

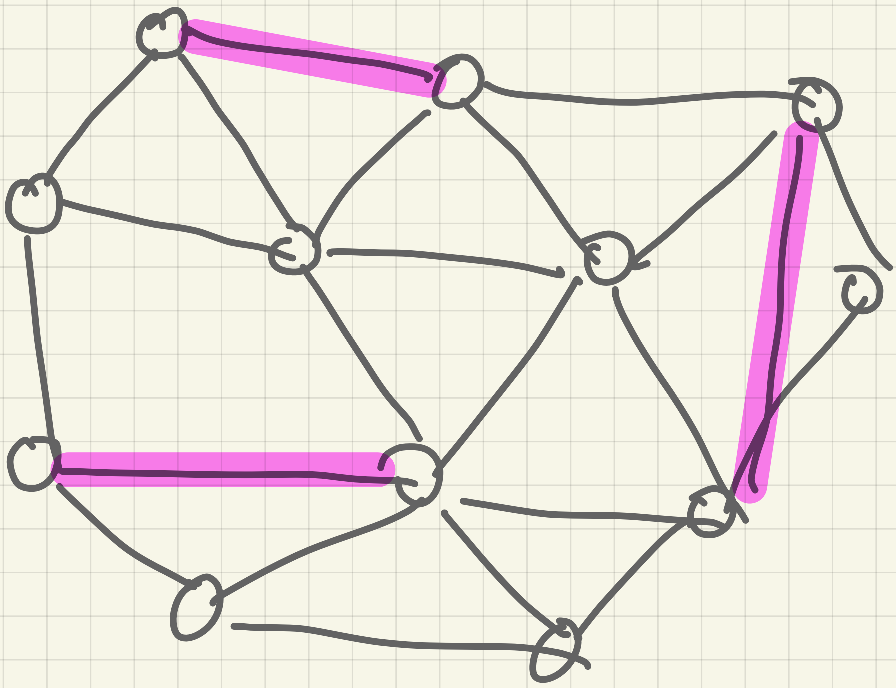
$$= 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Also nach $(**)$:

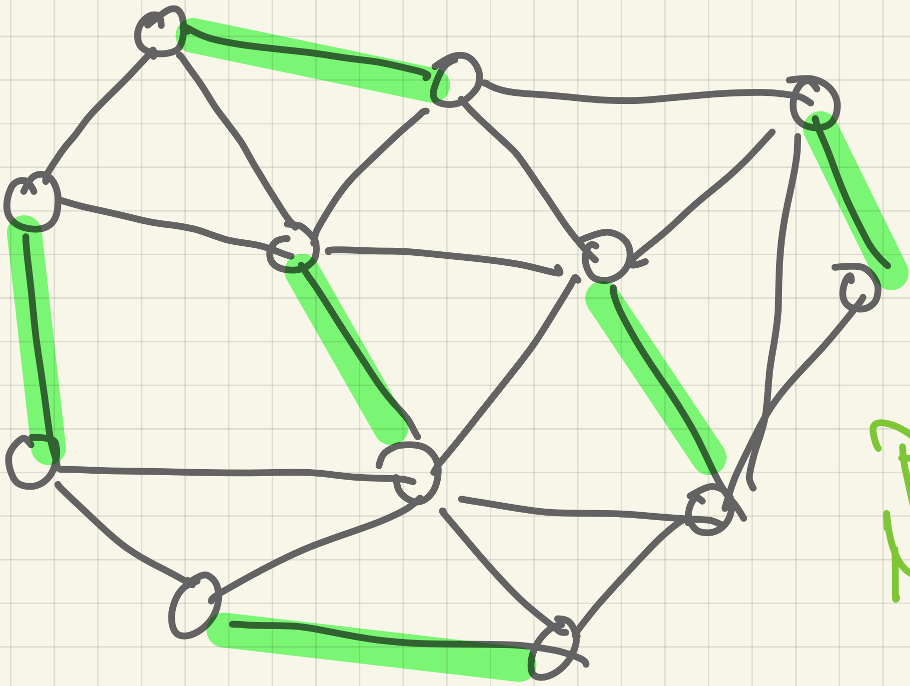
$$\operatorname{rang}(\mathrm{Cut}(G)) \geq \underbrace{\operatorname{rang}(\mathrm{Cut}(G'))}_{= |V(G')|} + |V(G) \setminus V(G')|$$

$$= |V(G)| \qquad \blacksquare$$

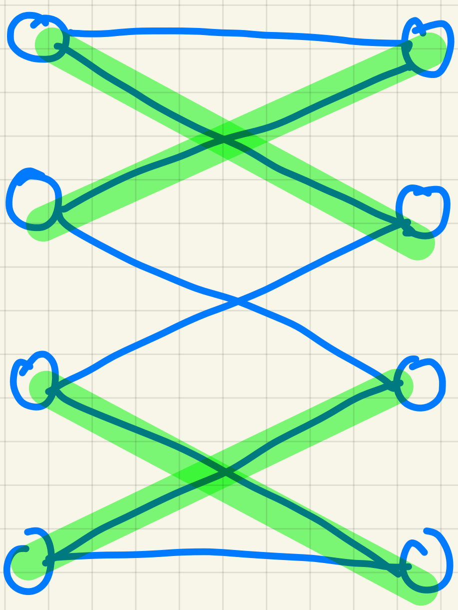
[25]



Matching



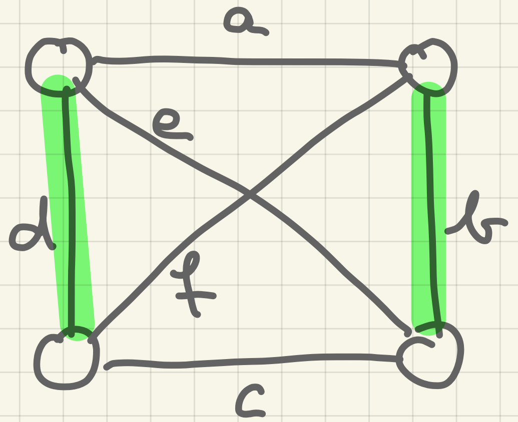
Perfektes Matching



[26] $A = [6] = \{1, 2, \dots, 6\}$

$B = \{1, 3, 6\} \subseteq A$

$$\chi(B) = (\underset{1}{1}, \underset{2}{0}, \underset{3}{1}, \underset{4}{0}, \underset{5}{0}, \underset{6}{1})$$



$M \subseteq E(G)$

$$\chi(M) = (\underset{a}{0}, \underset{b}{1}, \underset{c}{0}, \underset{d}{1}, \underset{e}{0}, \underset{f}{0})$$

[27] Für $x \in \{0,1\}^{E(G)}$ gilt:

$$\mathrm{Inz}(G) \cdot x \leq \mathbb{1}$$

$$V(G)\left\{ \underbrace{\boxed{\quad \mathrm{Inz}(G) \quad}}_{E(G)} \right. \cdot \left.\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}\right\} E(G) \leq \left.\begin{bmatrix} \mathbb{1} \end{bmatrix}\right\} V(G)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall v \in V(G):$$

$$\underbrace{\left\langle \mathrm{Inz}(G)_{v,*} \, , \, x \right\rangle}_{\displaystyle \sum_{e \in E(G)} \boxed{\mathrm{Inz}(G)_{v,e}} \cdot x_e \; = \sum_{e \in \delta(v)} x_e} \leq 1$$

$$\mathrm{Inz}(G)_{v,e} = \begin{cases} 1, & \text{falls } e \in \delta(v) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \qquad \forall v \in V(G)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \chi(M) \text{ für ein Matching } M \subseteq E(G)$$

Für $w \in \mathbb{R}^{E(G)}$ entsprechen die Optimallösungen von

$$\begin{aligned} \max\ & w^T x \qquad \left(= \langle w, x \rangle\right) \\ \text{s.t.}\ & \mathrm{Inz}(G) \cdot x \leq \mathbb{1} \\ & x \in \{0,1\}^{E(G)} \end{aligned}$$

den bzgl. w gewichtsmaximalen Matchings in G.

[29]