$\boxed{\text{MOD 7.6.19}}$ (Vertretung B. Peters)

[48] (Vgl. Abschnitt 1.5 "Reihenfolgeplanung")

$V(D) = \{1, 2, \dots, n\}$

<u>Variablen:</u> $x_{vw} \in \{0,1\}$ $(vw \in A(D))$

("$x_{vw} = 1 \iff vw \in H$")

$y_v \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ $(v \in V(D) \setminus \{1\})$

("$y_v = j \iff v$ liegt in H an j-ter Stelle nach 1")

MIP-Modell:

$$\min \sum_{a \in A(D)} c_a \cdot x_a$$

$$\sum_{w \in V(D) \setminus \{v\}} x_{vw} = 1 \quad \forall v \in V(D)$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{w\}} x_{vw} = 1 \quad \forall w \in V(D)$$

$$(*) \quad n \cdot x_{vw} - (y_w - y_v) \leq n-1 \quad \forall \underset{v \neq w}{v,w} \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$x_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A(D)$$

$$1 \leq y_v \leq n-1 \quad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}$$

Lemma MTZ [Miller, Tucker, Zemlin 1960]

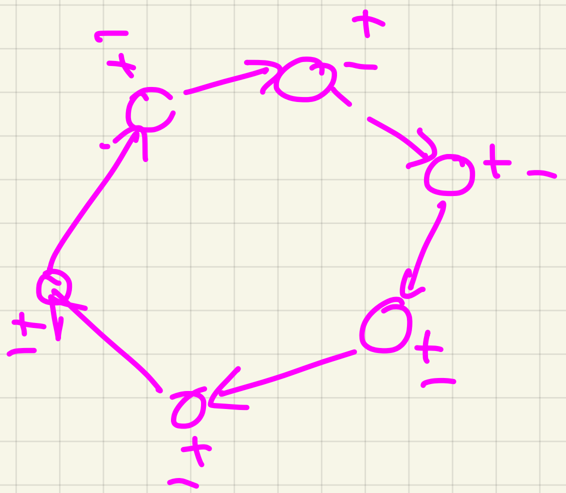
Erfüllen $(\bar{x}, \bar{y})$ (*) und $\bar{x} \in \{0,1\}^{A(D)}$, so enthält in der von $\bar{x}$ repräsentierten Bogenmenge

$$A(\bar{x}) := \{a \in A(D) : \bar{x}_a = 1\}$$

jeder (gerichtete) Kreis den Knoten 1.

Beweis: Angenommen, $K \subseteq A(\bar{x})$ wäre ein Kreis mit Knotenmenge $V(K)$ und $1 \notin V(K)$. Dann ist für jedes $(v,w) \in K$ die Ungleichung (*) für $(\bar{x}, \bar{y})$ gültig. Summiert man alle diese Ungleichungen auf erhält man:

$$\underbrace{\sum_{(v,w)\in K} \Big(n\cdot \underbrace{\bar{x}_{vw}}_{1} - (\bar{y}_w - \bar{y}_v)\Big)}_{n\cdot|K| - \underbrace{\sum_{(v,w)\in K}(\bar{y}_w - \bar{y}_v)}_{0}} \le \underbrace{\sum_{(v,w)\in K}(n-1)}_{(n-1)\cdot|K|}$$



$$\Longrightarrow \quad n\cdot|K| \le (n-1)\cdot|K| \quad \Big| \cdot \frac{1}{|K|}$$

$|K| \ge 3$ K Kreis

$$\Longrightarrow \quad n \le n-1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le -1 \quad ↯$$

<u>Bemerkung</u>: Mittels Lemma MTZ sieht man leicht, dass das Modell korrekt ist.

[49] Zusätzliche Variablen zum ATSP-Modell (d=1)

$$z_{vi} \in \{0,1\} \quad (v \in V(D) \setminus \{1\},\ i \in [t])$$

(„$z_{vi} = 1 \iff$ Knoten v wird von Fahrzeug i besucht")

$$\min \sum_{a \in A(D)} c_a \cdot x_a$$

s.t.

$$\sum_{w \in V(D) \setminus \{v\}} x_{vw} = 1 \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{w\}} x_{vw} = 1 \qquad \forall w \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$\sum_{w \in V(D) \setminus \{1\}} x_{1w} = t$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{1\}} x_{v1} = t$$

$$(*) \quad n \cdot x_{vw} - (y_w - y_v) \le n-1 \qquad \forall v,w \in V(D) \setminus \{1\},\ v \neq w$$

$$\sum_{v \in V(D) \setminus \{1\}} b_v \cdot z_{vi} \le k_i \qquad \forall i \in [t]$$

$$\sum_{i=1}^{t} z_{vi} = 1 \qquad \forall v \in V(D) \setminus \{1\}$$

$$z_{vi} + x_{vw} - z_{wi} \le 1 \qquad \forall v,w \in V(D) \setminus \{1\},\ v \neq w,\ \forall i \in [t]$$

$$x_a \in \{0,1\} \quad \forall a \in A(D)$$

$$z_{vi} \in \{0,1\} \quad \forall v \in V(D) \setminus \{1\} \quad \forall i \in [t]$$

$$\left(1 \leq y_v \leq n-1 \quad \forall v \in V(D) \setminus \{1\} \right)$$