MOD 28.6.19

Beispiel für Simplex-Algorithmus und Tableau

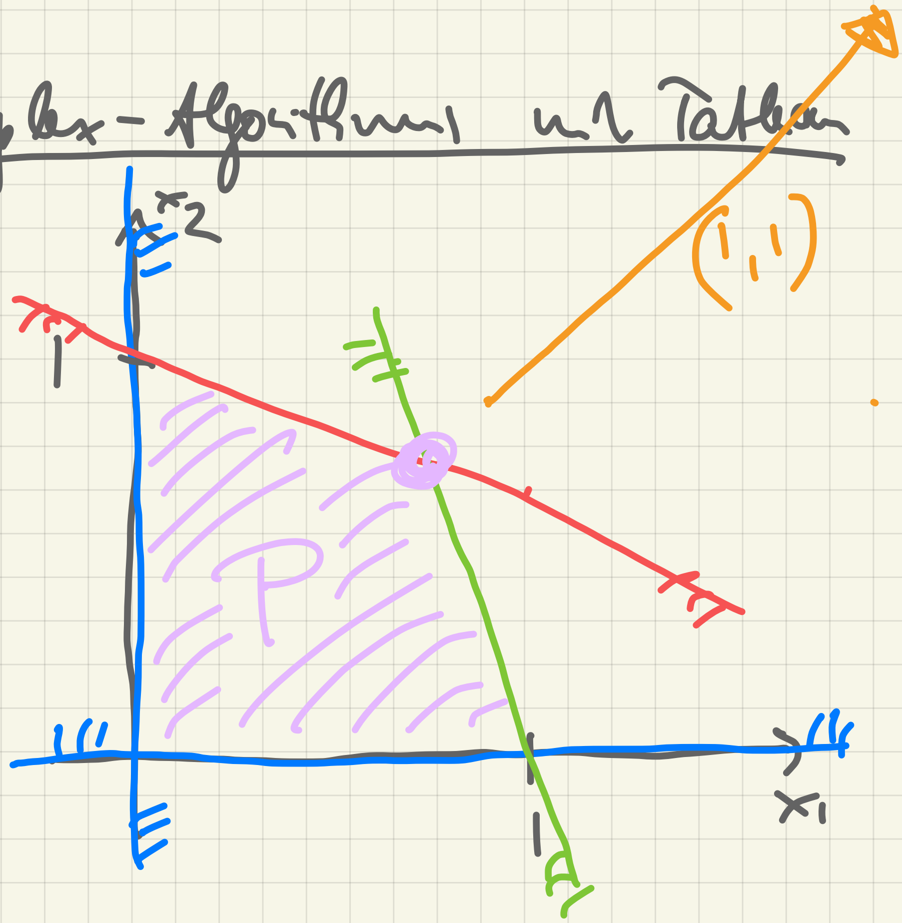
max $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$

s.t. $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 3$

$3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$



Umformulierung in "Standardform":

max ξ

s.t.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \xi \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}}$$

"Schlupf-Variablen"

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 &= 3 - 3x_1 - x_2 \\ \zeta &= 0 + x_1 + x_2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}}$$

Tableau 1: Darstellung der "Basis-Variablen" x_3, x_4 dieses Tableaus und der Zielfunktionsvariablen ζ als affine Funktionen der Nicht-Basis-Variablen x_1, x_2 dieses Tableaus.

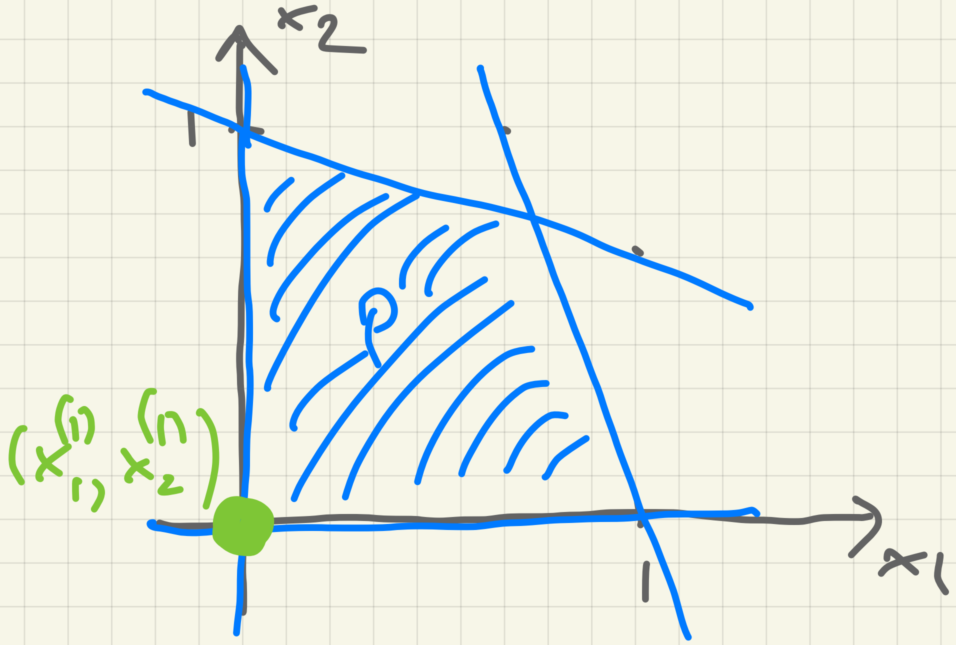
Aufgabe: Wähle nicht-negative Belegungen der Nicht-Basis-Variablen, so dass die Basis-Variablen auch nicht-negative Werte annehmen und ζ möglichst groß wird.

"Basis-Lösung zur Basis $\{3,4\}$":

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} \\ \| & \| & \| & \| \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ & & \geq & \geq \\ & & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ "zulässige Basis"

Zielfunktionswert $\xi = 0$



Beobachtung: Erhöhen von x_1 vergrößert ξ.

[Weil x_1 in $\xi = 0 + 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$ positiven Koeffizienten ("reduzierte Kosten") hat.]

Schritt ("Pivot"): Um $x^{(2)}$ zu erhalten, setze $x_1^{(2)}$ auf den maximalen Wert $\delta \geq 0$, so dass

$$x_3^{(2)} = 3 - 1 \cdot \delta \geq 0 \iff \delta \leq \frac{3}{|-1|} = 3$$

und

$$x_4^{(2)} = 3 - 3 \cdot \delta \geq 0 \iff \delta \leq \frac{3}{|-3|} = 1$$

sind, also $\delta = 1$.

"ratio test"

Wir erhalten die Lösung

$$x_1^{(2)} = 1 \quad x_2^{(2)} = 0 \quad x_3^{(2)} = 2 \quad x_4^{(2)} = 0$$

vom Wert

$$\xi = 0 + \underbrace{x_1^{(2)}}_{=1} + x_2^{(2)} = 1$$

$x^{(2)}$ ist die Basis-Lösung zur neuen Basis $\{1, 3\}$, die aus der alten Basis $\{3, 4\}$ durch Austausch von x_4 gegen x_1 entsteht.

Das Tableau zur neuen Basis $\{1,3\}$ erhält man mittels Auflösens von

$$x_4 = 3 - 3x_1 - x_2$$

nach x_1:

$$x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \qquad (*)$$

und Ersetzen der neuen Basis-Variablen x_1 in allen übrigen Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} x_3 &= 3 - x_1 - 3x_2 \\ x_4 &= 3 - 3x_1 - x_2 \\ \xi &= 0 + x_1 + x_2 \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 - \left(1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) - 3x_2 \\ x_1 &= 1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \\ \xi &= 0 + \left(1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4\right) + x_2 \end{aligned}$$

$$x_3 = 2 - \frac{8}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4$$
$$x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$$
$$\xi = 1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4$$

Basis-Lösung $x^{(2)} = (1, 0, 2, 0)$

vom Wert $\xi^{(2)} = 1$