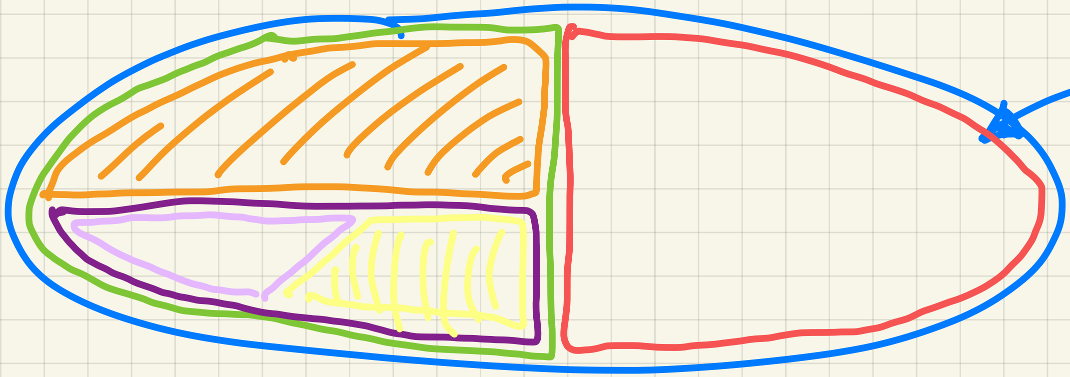
$\boxed{\text{MOD 5.7.19}}$

Lösen von MIP's

Aufgabe: $(*)\quad \max\{\langle c,x\rangle : Ax \leq b,\ x_i \in \mathbb{Z}\ \forall i \in I\}\qquad (I \subseteq [n])$



$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b,\ x_i \in \mathbb{Z}\ \forall i \in I\}$

BRANCH-AND-BOUND

1. Initialisierung

- $\mathcal{S} \leftarrow \{(*)\}$ ("aktive Subprobleme")
- $x^{best} \leftarrow$ undefiniert ("beste bisher bekannte Lösung")
- $\omega \leftarrow -\infty$ ("Wert von x^{best}")

2. Solange $\mathcal{S} \neq \emptyset$:

a) • Wähle $\Pi \in \mathcal{S}$:

$$(\Pi) \quad \max\{\langle c, x\rangle : \tilde{A}x \leq \tilde{b},\ x_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in I\}$$

• $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \setminus \{\Pi\}$

b) • Bestimme Optimallösung x^* der "LP-Relaxierung"

$$\xi^* := \max\{\langle c, x\rangle : \tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$$

von (Π).

("BOUND": ξ^* ist obere Schranke an Optimalwert von (Π))

c) Falls $\xi^* > \omega$:

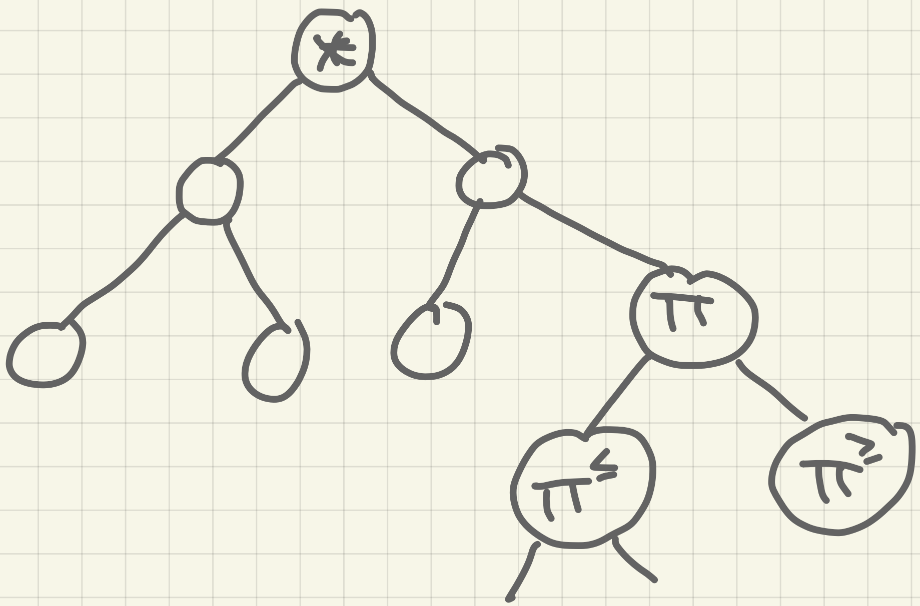
• Falls $x_i^* \in \mathbb{Z} \ \forall i \in I$ $\left(\Rightarrow x^* \text{ zulässig für } (\Pi)\right)$:

- $x^{best} \leftarrow x^*$
- $\omega \leftarrow \xi^*$

- Sonst:
  - Wähle ein $i \in I$ mit $x_i^* \notin \mathbb{Z}$
  - Erzeuge Subprobleme $\Pi^{\leq}$ und $\Pi^{\geq}$ aus Π durch Hinzufügen von $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ bzw. $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$.
  - $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{\Pi^{\leq}, \Pi^{\geq}\}$
    ("<u>BRANCH</u>")

<u>Bemerkungen zum Branch-and-Bound Verfahren</u>

- Die in einem Lauf des Algorithmus erzeugten Subprobleme bilden einen Baum:



- Falls $\xi^* \leq \omega$, so hat Π keine bessere Lösung als die schon gefundene Lösung x^{best} von $(*)$.
- Wenn der Algorithmus terminiert, dann ist x^{best} eine Optimallösung von $(*)$ (es sei denn, x^{best} ist dann immer noch undefiniert — dann hat $(*)$ gar keine zulässige Lösung).
- Falls $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ beschränkt ist (oder alle x_i mit $i \in I$ untere und obere Schranken haben), terminiert der Algorithmus.
- Zu jedem Zeitpunkt gilt für das Maximum ξ_{max} aller Optimalwerte von LP-Relaxierungen der gerade aktiven Subprobleme: (Wir nehmen hier an, dass $\omega > 0$ ist.)

$$\omega \geq \frac{\omega}{\max\{\omega, \xi_{best}\}} \cdot OPT$$

(wobei: OPT = Optimalwert von $(*)$).

<u>Bsp.:</u> $\omega = 95$, $\xi_{\text{Teil}} = 100$

$$\Longrightarrow \quad \omega \geq \frac{95}{100} \cdot OPT = 0.95 \cdot OPT$$

<u>Modifikation zu BRANCH-AND-CUT:</u>

Falls (in 2c) $\xi^* > \omega$ (und nicht $x_i^* \in \mathbb{Z}\ \forall i \in I$)
suche Ungleichung $\langle a, x \rangle \leq \beta$, die gültig ist für alle zulässigen Punkte $\boxed{\{x \in \mathbb{R}^n : \hat{A}x \leq \tilde{b},\ x_i \in \mathbb{Z}\ \forall i \in I\}}$ von Π, aber verletzt ist von x^* (d.h. $\langle a, x^* \rangle > \beta$).

Illustration für $n = 2$ und $I = \{1\}$: