Definition. *Ein **Weg** ist ein Graph P mit $\mathrm{V}(P) = \{v_0, \ldots, v_k\}$ ($k \geq 0$) mit paarweise verschiedenen Knoten $v_0, \ldots, v_k$ und Kantenmenge $\mathrm{E}(P) = \{v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{k-1}v_k\}$; seine **Länge** ist k. P ist ein s-t-**Weg**, wenn $\{v_0, v_k\} = \{s, t\}$ ist.*

Definition. *Ein **Kreis** ist ein Graph C mit $\mathrm{V}(C) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ ($k \geq 3$) mit paarweise verschiedenen Knoten $v_1, \ldots, v_k$ und Kantenmenge $\mathrm{E}(C) = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k, v_kv_1\}$; seine **Länge** ist k.*

[15]

Definition. *Sei G ein Graph. Ein **Weg/Kreis in** G ist ein Untergraph H von G, der ein Weg/Kreis ist.*

Bemerkung.

- *Ein Weg/Kreis in einem Graphen G, der ein spannender Untergraph von G ist, heißt **hamiltonisch**.*
- *Eine Kantenteilmenge $F \subseteq \mathrm{E}(G)$ eines Graphen G identifizieren wir oft mit dem Untergraphen $(\mathrm{V}(F), F)$ von G, wobei $\mathrm{V}(F) \subseteq \mathrm{V}(G)$ die Menge aller Knoten sei, die in wenigstens einer Kante aus F enthalten sind.*

[16]

Definition. *Ein Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn es für je zwei Knoten $s, t \in \mathrm{V}(G)$ einen s-t-Weg in G gibt.*

Definition. *Die **Komponenten** (auch: **Zusammenhangskomponenten**) eines Graphen sind seine inklusionsmaximalen zusammenhängenden induzierten Untergraphen.*

[17]

Definition. *Ein Graph heißt **azyklisch** oder ein **Wald**, wenn er keinen Kreis enthält (d.h. wenn keiner seiner Untergraphen ein Kreis ist). Ein zusammenhängender Wald heißt **Baum**.*

[18]

Bemerkung. *In jedem azyklischen Graph G mit $\mathrm{E}(G) \neq \varnothing$ gibt es wenigstens zwei Knoten vom Grad Eins.*

[19]

Satz 1. *Die folgende Aussagen sind paarweise äquivalent für Graphen G:*

1. *G ist ein Baum.*
2. *Für je zwei Knoten $s, t \in \mathrm{V}(G)$ ($s \neq t$) gibt es genau einen s-t-Weg in G.*
3. *G ist zusammenhängend, aber für alle Kanten $e \in \mathrm{E}(G)$ von G ist $(\mathrm{V}(G), \mathrm{E}(G) \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.*
4. *G ist azyklisch, aber für alle Nicht-Kanten $\bar{e} \in \binom{\mathrm{V}(G)}{2} \setminus \mathrm{E}(G)$ von G enthält $(\mathrm{V}(G), \mathrm{E}(G) \cup \{\bar{e}\})$ einen Kreis.*

[20]

Korollar 2.

1. *Jeder zusammenhängende Graph enthält einen spannenden Baum.*
2. *Jeder Baum T (mit $|\mathrm{V}(T)| \geq 1|$) hat genau $|\mathrm{V}(T)| - 1$ Kanten.*
3. *Ein Graph, der genau eine Kante weniger als Knoten hat, ist genau dann ein Baum, wenn er azyklisch oder zusammenhängend ist.*

(Beweis: Übungen)