Definition. *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathrm{E}(G)$ heißt ein* ***Matching*** *(oder auch eine* ***Paarung****) im Graphen G, wenn $e \cap e' = \varnothing$ für alle $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$ gilt; ein Matching M heißt* ***perfekt****, wenn $|M| = \frac{1}{2}|\mathrm{V}(G)|$ gilt (d.h., wenn jeder Knoten in einer Kante des Matchings enthalten ist).*

[25]

Definition. *Sei A eine endliche Menge. Der* ***charakteristische Vektor*** *(oder auch:* ***Inzidenzvektor****) einer Teilmenge $B \subseteq A$ ist der 0/1-Vektor $\chi(B) \in \{0,1\}^A$ mit*

$$\chi(B)_a = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[26]

Bemerkung. *Für jeden Graphen G gelten:*

- $\{\chi(M) : M \text{ Matching in } G\}$
  $= \{x \in \{0,1\}^{\mathrm{E}(G)} : \mathrm{Inz}(G)x \leq \mathbb{1}\}$
- $\{\chi(M) : M \text{ perfektes Matching in } G\}$
  $= \{x \in \{0,1\}^{\mathrm{E}(G)} : \mathrm{Inz}(G)x = \mathbb{1}\}$

[27]

2.2 Gerichtete Graphen

Definition. *Ein einfacher* ***gerichteter Graph*** *(auch:* ***Digraph*** *= directed graph) ist ein Paar* $D = (V, A)$ *mit einer (hier) endlichen Menge* V *und einer Menge*

$$A \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$$

von geordneten Paaren von Elementen aus V.

- $\mathrm{V}(D) := V$ *: Menge der* ***Knoten*** *von* D
- $\mathrm{A}(D) := A$ *: Menge der* ***Bögen*** *(Kanten) von* D

Für $a = (v, w) \in A$*:*

- *Alternative Schreibweise:* $a = vw$
- v *heißt* ***Anfangsknoten*** *(**tail**) von* a.
- w *heißt* ***Endknoten*** *(**head**) von* a.
- a *ist eine* ***Aus-Bogen*** *von* v.
- a *ist eine* ***Ein-Bogen*** *von* w.
- w *ist* ***Aus-Nachbar*** *von* v.
- v *ist* ***Ein-Nachbar*** *von* w.

Definition. *Sei D ein Digraph.*

- *Für $S \subseteq \mathrm{V}(D)$ heißt*

  $$\delta^{\text{aus}}(S) := \delta_D^{\text{aus}}(S) := \mathrm{A}(D) \cap (S \times (\mathrm{V}(D) \setminus S))$$

  *der von S induzierte **Schnitt***

- *Für $v \in \mathrm{V}(D)$ heißen*

  $$\delta^{\text{aus}}(v) := \delta_D^{\text{aus}}(v) := \mathrm{A}(D) \cap (\{v\} \times \mathrm{V}(D))$$

  und

  $$\delta^{\text{ein}}(v) := \delta_D^{\text{ein}}(v) := \mathrm{A}(D) \cap (\mathrm{V}(D) \times \{v\})$$

  *der **Aus-Stern** bzw. **Ein-Stern** von v.*

[29]

Definition. *Ein Graph D' ist **Unterdigraph** (**Subdigraph**) eines Digraphen D, wenn $\mathrm{V}(D') \subseteq \mathrm{V}(D)$ und $\mathrm{A}(D') \subseteq \mathrm{A}(D)$ gelten; ist sogar $\mathrm{V}(D') = \mathrm{V}(D)$, so ist D' ein **spannender Unterdigraph** von D.*

[30]

Definition. *Für einen Graphen D und $U \subseteq \mathrm{V}(D)$ ist $D[U] := (U, \mathrm{A}(D) \cap (U \times U)$ der von U **induzierte Unterdigraph** von D.*

[31]

Definition. *Ein **gerichteter Weg** ist ein Digraph P mit Knotenmenge $\mathrm{V}(P) = \{v_0, \dots, v_k\}$ ($k \geq 0$) mit paarweise verschiedenen $v_0, \dots, v_k$ und Bogenmenge*

$$\mathrm{A}(P) = \{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k)\};$$

*seine **Länge** ist k. P ist ein s-t-**Weg**, wenn $v_0 = s$ und $v_k = t$ sind.*

Definition. *Ein **gerichteter Kreis** ist ein Digraph C mit Knotenmenge $\mathrm{V}(C) = \{v_1, \dots, v_k\}$ ($k \geq 2$) mit paarweise verschiedenen $v_1, \dots, v_k$ und Bogenmenge*

$$\mathrm{A}(C) = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k), (v_k, v_1)\};$$

*seine **Länge** ist k.*

[32]

Definition. *Sei D ein Digraph. Ein **Weg/Kreis in** D ist ein Unterdigraph H von D, der ein gerichteter Weg/Kreis ist.*

Bemerkung.

- *Ein Weg/Kreis in einem Digraphen D, der ein spannender Untergraph von D ist, heißt **hamiltonisch**.*
- *Eine Bogenteilmenge $F \subseteq \mathrm{A}(D)$ eines Digraphen D identifizieren wir oft mit dem Unterdigraphen $(\mathrm{V}(F), F)$ von D, wobei $\mathrm{V}(F) \subseteq \mathrm{V}(D)$ die Menge aller Knoten sei, die Anfangs- oder Endknoten von wenigstens einem Bogen aus F sind.*

[33]

Definition. *Ein Digraph D heißt **stark zusammenhängend**, wenn es für je zwei Knoten $s, t \in \mathrm{V}(D)$ einen s-t-Weg in D gibt.*

Definition. *Die **starken Zusammenhangskomponenten** eines Digraphen sind seine inklusionsmaximalen stark zusammenhängenden induzierten Untergraphen.*

[34]

Definition. *Der **zugrunde liegende ungerichtete Graph** eines Digraphen D ist der Graph $(\mathrm{V}(D), E)$ mit*

$$\{v, w\} \in E \Leftrightarrow ((v, w) \in \mathrm{A}(D) \text{ oder } (w, v) \in \mathrm{A}(D)).$$

Definition. *Die **schwachen Zusammenhangskomponenten** eines Digraphen sind die von den Knotenmengen der Komponenten seines unterliegenden ungerichteten Graphen induzierten Unterdigraphen.*

[35]

Definition. *Ein Digraph heißt **azyklisch**, wenn er keinen Kreis enthält (d.h. wenn keiner seiner Untergraphen ein gerichteter Kreis ist).*

[36]

Bemerkung. *In jedem azyklischen Digraphen G mit $\mathrm{V}(D) \neq \varnothing$ gibt es wenigstens einen Knoten mit Ausgrad Null und wenigstens einen Knoten mit Eingrad Null.*

[37]