Definition. *Die **Inzidenzmatrix** eines Digraphen D ist die Matrix* $\operatorname{Inz}(D) \in \{0,1\}^{\mathrm{V}(D)\times \mathrm{A}(D)}$ *mit*

$$\operatorname{Inz}(D)_{v,a} = \begin{cases} 1 & \textit{falls } a \in \delta^{\text{ein}}(v) \\ -1 & \textit{falls } a \in \delta^{\text{aus}}(v) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}.$$

[38]

Satz 5. *Der Rang der Inzidenzmatrix eines Digraphen D ist $|\,\mathrm{V}(D)|$ minus der Anzahl der schwachen Zusammenhangskomponenten von G.*

[39]

Definition. *Ein **Netzwerk** ist ein Digraph D zusammen mit **unteren** (lower) und **oberen** (upper) **Kapazitäten***

$$\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^{\mathrm{A}(D)} \quad \textit{bzw.} \quad u \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{\mathrm{A}(D)}$$

auf den Bögen mit $\ell \leq u$; die unteren Kapazitäten sind $\ell = \mathbb{O}$, falls sie nicht angegeben werden.

[40]

Definition. *In einem Netzwerk mit Digraph D und unteren und oberen Kapazitäten ℓ bzw. u ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}(D)} \,:\, \mathrm{Inz}(D)x = \mathbb{0}, \ell \leq x \leq u\}$$

*die Menge der **Zirkulationen**.*

[41]

Definition. *Seien A eine endliche Menge und $B \subseteq A$, Für $x \in \mathbb{R}^A$ sei*

$$X(B) := \sum_{b \in B} x_b \,.$$

[42]

Definition. *In einem Netzwerk mit Digraph D, (oberen) Kapazitäten u, einer **Quelle** $s \in \mathrm{V}(D)$ und einer **Senke** $t \in \mathrm{V}(D)$ (mit $s \neq t$) ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}(D)} \,:\, \mathrm{Inz}(D)^{s,t}x = \mathbb{0}, \mathbb{0} \leq x \leq u\}$$

*die Menge der s-t-**Flüsse** (wobei $\mathrm{Inz}(D)^{s,t}$ die Matrix ist, welche aus $\mathrm{Inz}(D)$ durch Streichen der beiden zu s und t gehörenden Zeilen entsteht); der **Wert** eines s-t-Flusses x ist*

$$x(\delta^{\mathrm{aus}}(s)) - x(\delta^{\mathrm{ein}}(s))$$

($= x(\delta^{\mathrm{ein}}(t)) - x(\delta^{\mathrm{aus}}(t))$).

[43]

Kapitel 3

MILP für KO-Probleme

3.1 Ausfallsichere Netze

Gegeben:

- Graph G
- Kantenkosten $c \in \mathbb{Q}^{\mathrm{E}(G)}$
- Ausfallsicherheitsanforderungen $\alpha_i \in \mathbb{N}$ für einige Knotenpaare $(s_i, t_i) \in \mathrm{V}(G) \times \mathrm{V}(G)$ mit $s_i \neq t_i$ (für $i \in [k]$)

Eine Kantenteilmenge $F \subseteq \mathrm{E}(G)$ heißt **ausfallsicher**, wenn für jedes $i \in [k]$ gilt: Für alle $F' \subseteq F$ mit $|F'| \leq \alpha_i$ gibt es einen s_i-t_i-Weg in $F \setminus F'$. [44]

Gesucht:
Eine kostenminimale ausfallsichere Kantenteilmenge

Definition. *Seien $s, t \in \mathrm{V}(G)$ zwei Knoten im Graphen G. Ein Schnitt $\delta(U) = \delta(\mathrm{V}(G) \setminus U)$ (mit $U \subseteq \mathrm{V}(G)$) heißt ein **s-t-Schnitt**, wenn $s \in U, t \notin U$ oder $s \notin U, t \in U$ gilt.*

Bemerkung. *Eine Kantenteilmenge $F \subseteq \mathrm{E}(G)$ im obigen Problem ist genau dann ausfallsicher, wenn für alle $i \in [k]$ die minimale Kardinalität eines s_i-t_i-Schnitts in $(\mathrm{V}(G), F)$ wenigstens $\alpha_i + 1$ ist.*

[45]