Definition. *Die **affine Hülle** $\mathrm{aff}(X)$ einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Schnitt aller affinen Unterräume, die X enthalten.*

Definition. *Die **konvexe Hülle** $\mathrm{conv}(X)$ einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die X enthalten.*

Bemerkung. *Affine bzw. konvexe Hüllen sind affine Unterräume bzw. konvexe Mengen.*

Satz 9. *Für jede Menge $X = \{x^1, \ldots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gelten:*

$$\mathrm{aff}(X) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \ : \ \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

*(**affine Kombinationen** von X)*

$$\mathrm{conv}(X) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \ : \ \sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$$

*(**konvexe Kombinationen** von X)*

[55]

Definition. *Die* ***Dimension*** *$\dim(P)$ eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Dimension seiner affinen Hülle* $\operatorname{aff}(P)$.

Definition. *Die* 0-, 1-, *bzw.* $\dim(P)$*-dimensionalen Seiten eines Polyeders P heißen seine* ***Ecken***, ***Kanten*** *bzw.* ***Facetten***.

[56]

Satz 10. *Ist P ein Polytop, so ist genau dann*

$$P = \{x \in \operatorname{aff}(P) \; : \; Ax \leq b\} \, ,$$

wenn $Ax \leq b$ für jede Facette F von P wenigstens eine F definierende Ungleichung enthält.

Satz 11 (Satz von Weyl-Minkowski)**.** *Jedes Polytop ist die konvexe Hülle seiner (endlich vielen) Ecken. Umgekehrt ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten stets ein Polytop.*

[57]

Satz 12. *Ist $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop, so wird für jedes $c \in \mathbb{R}^n$ das Optimum von*

$$\max / \min\{c^T x \; : \; x \in P\}$$

in einer Ecke von P angenommen.

Satz 13. *Jede Kante eines Polytops ist die konvexe Hülle (Verbindungsstrecke) zweier Ecken des Polytops. Der von den Ecken (Knoten) und Kanten definierte Graph eines Polytops ist zusammenhängend.*

4.2 Der Simplex-Algorithmus

- Löst (kontinuierliche) lineare Optimierungsprobleme (LP's)
- Sucht zunächst eine Startecke v.
- Solange v keine Optimallösung ist wird v durch eine zu v über eine Kante benachbarte Ecke mit besserem Zielfunktionswert ersetzt.
- Entscheidend für die Korrektheit: Konvexität (*lokale Optimalität impliziert globale Optimalität*)
- Algorithmische Umsetzung: Pivotisieren in Tableaus oder den Rechenaufwand verringernde Verfahren der Linearen Algebra (*Faktorisierung von Basis-Matrizen,* η*-updates*)
- Andere relevante Klasse von LP-Algorithmen: *Innere-Punkte-Verfahren*